Colegio Secundario N°5051
“Nuestra Señora de la Merced”

2.021

Cartilla de Matemática
3º Año

MODALIDAD:

- ✓ TURNO MAÑANA: BACHILLER EN CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES
- ✓ TURNO TARDE: BACHILLER EN ECONOMIA Y ADMINISTRACION

CURSO: 3º **ESPACIO CURRICULAR:** Matemática

PROFESORES: Elbio Saravia, Caliva Marcelo, Elsa Pinikas, Vercellino Claudia – López Mirta – Llampa Mario – Corimayo Olarte Ismael

AÑO: 2.021

Contenido

ESTABLECIMIENTO: Colegio Secundario Nº5051 "Nuestra Señora de la Merced"

TURNO: Tarde

MODALIDAD:

- ***TURNO MAÑANA: BACHILLER EN CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES***
- ***TURNO TARDE: BACHILLER EN ECONOMIA Y ADMINISTRACION***

CURSO: 3º **ESPACIO CURRICULAR:** Matemática

PROFESORES: Elbio Saravia, Caliva Marcelo, Elsa Pinikas, Vercellino Claudia – López Mirta – Llampa Mario – Corimayo Olarte Ismael

FUNDAMENTACIÓN:

La caracterización de la sociedad actual como civilización sociocognitiva supone fenómenos que atraviesan lo social, lo económico, lo cultural, lo educativo, etc. Por lo cual el énfasis se sitúa en la adquisición y desarrollo de las capacidades, que habiliten a los estudiantes a afrontar los desafíos de los nuevos contexto y escenarios. Permitiendo que los estudiantes puedan organizar, discriminar, analizar y tomar una decisión reflexiva en su futura trayectoria escolar o bien laboral.

PROGRAMA

- **UNIDAD 1 Números Racionales.**

Operaciones con números racionales. Revisión. Ecuaciones lineales con Q.

- **UNIDAD 2 Expresiones Algebraicas Enteras.**

Expresiones algebraicas. Polinomios. Adición y sustracción de polinomios. Multiplicación de polinomios. División de polinomios. Regla de Ruffini. Teorema del resto. Potenciación de polinomios. Factorización de polinomios: Factor común y por grupo. Diferencia de cuadrado.Trinomio cuadrado perfecto. Cuatrinomio cubo perfecto. Suma y resta de potencia de igual exponente.

- **UNIDAD Nº3: Algebra y Funciones.**

Función afín. Ecuación explicita de la recta. Perpendicularidad y paralelismo de las rectas. Sistemas de ecuaciones lineales. Resolución analítica: Método de sustitución. Método de igualación y método gráfico.

- **UNIDAD N°4: Trigonometría.**
- Sistema de medición de ángulos. Teorema de Pitágoras. Razones trigonométricas de un triángulo rectángulo. Resolución de triángulos rectángulos.

BIBLIOGRAFIA

✓ Matemática Activa 9º E.G.B Editorial Puerto De Palos
✓ Logikamente. Libro De Matemática A Medida. Tomo II (Juan Pablo Pisano) Editorial Logikamente.
✓ Matemática 3. Editorial Santillana.

UNIDAD Nº 2: EXPRESIONES ALGEBRAICAS. POLINOMIOS

TEORIA

Una expresión algebraica en una combinación finita de números, y letras; ligados entre sí por la suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Los ***números*** se denominan ***coeficientes*** (salvo los exponentes de las potencias) y las ***letras*** se denominan ***variables***. Ejemplo $\frac{3-0,5\,w}{2}$

Un polinomio es una expresión algebraica que **no** puede tener una **variable** en el denominador o un exponente negativo; la variable no puede estar afectada por una raíz.

Ejemplos: a) $\sqrt{a} + c^5$ b) $\frac{r+1}{s-2}$ **NO son polinomios**

1) Marcar con una X las expresiones algebraicas que son polinomios.

- ☐ a) $\frac{3-5^{-1}}{2}$
- ☐ b) $\sqrt{3x} - y$
- ☐ c) $4x^{-3}$
- ☐ d) $\frac{7x^5}{x}$
- ☐ e) $3z^4 - \frac{1}{5}m^5$
- ☐ **f)** $\left(\sqrt{3x} - 1\right) : z$
- ☐ g) $2a^{\frac{3}{4}} - 5b^{\frac{1}{2}}$
- ☐ h) $\frac{6}{(x-y)^{-2}}$
- ☐ i) $\frac{4w^{-5}}{9w^{-3}}$

Polinomio de variable X

TEORIA

- Un ***monomio*** es un polinomio de ***un solo término***, su grado es el valor del *exponente* de la variable **X.** Ejemplos a) $0{,}7\,x^4 \longrightarrow$ grado 4

  b) $\frac{3}{5}x^2 \longrightarrow$ grado 2
- Dos monomios son ***semejantes*** cuando tienen el ***mismo grado*.**

  Ejemplo $\frac{2\,x^5}{3}$ y $5x^5$
- Un polinomio es una suma algebraica de dos o más monomios y esta ***reducido*** cuando ***no tiene monomios semejantes***.
- **El valor numérico** de un polinomio se obtiene al reemplazar **x** por un número real,

Ejemplo: $P(x) = 5x^2 + 3x - 7$ $\quad P(2) \rightarrow 5.2^2 + 3.2 - 7 = 20 + 6 - 7 = 19$

1) Hallar el polinomio reducido en cada caso. Y el valor numérico cuando x = 2

Para reducir un polinomio, identificamos los términos que sean semejantes y luego los resolvemos

a) $P(x)= 2x - x^2 + 2 - 7x + 5x^2 + 3x - 8$

$P(x) = - x^2 + 5x^2 + 2x - 7x + 3x + 2 - 8$

$P(x) = 4x^2 - 2x + 6$

$P(2) = 4 . 2^2 - 2 . 2 + 6 = 18$ es el valor numérico **cuando x = 2**

b) $x^5 - x^2 - x + x^3 - x^5 + x - x^2 + x^3 + x =$

c) $\frac{1}{2}\,x^2 - 5x + x^3 + 3x^2 - 4x - 7 - \frac{3}{2}\,x^3 =$

d) $5x^4 - 3x + 4x^2 - 0{,}5x + x^2 - 9 + x =$

e) $\frac{2}{3} - 0{,}\hat{2}x^2 + 1{,}\hat{1} - \frac{5}{6}x^2 - 4x^4 + \frac{5}{3}x^2 =$

TEORIA

- **Grado**: de un polinomio reducido viene dado por el término que tenga la variable con el mayor exponente.
- **Coeficiente principal** es el coeficiente del monomio de mayor grado.
- **Término independiente** es el coeficiente del monomio de grado 0.
- Un polinomio esta **ordenado** cuando sus términos están ordenados en forma creciente o decreciente respecto de los exponentes de la variable.
- Un polinomio esta **completo** cuando tiene todas las potencias decrecientes del grado, para completarlo se agregan los términos que faltan con coeficiente 0.

Ejemplo; $P(x) = -x^4 + 5 + 7x - 4x^5 + 2x^2$ $\longrightarrow$ lo ordeno y lo completo

$P(x) = -4x^5 - x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 7x + 5$ $\longrightarrow$

- Grado 5
- Coeficiente principal -4
- Termino independiente 5

1) Escribir un polinomio reducido que cumpla con las siguientes condiciones
   a) Binomio de grado tres y termino independiente racional.
   b) Monomio de grado seis y coeficiente principal no entero.
   c) Trinomio completo con coeficientes negativos.
2) Completa, ordena y clasifica los siguientes polinomios
   a) $P(X) = 2 - 3x^3$
   b) $Q(X) = -4x^3 + \frac{3}{8}x^5$
   c) $R(X) = -5 - 3x^6 + 2x^2$

SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

TEORIA

Dados los polinomios $P(x)= 5x - 3 +4x^3 – 2x^2$ y $Q(x)= 2x^3 - x + 6x^2 – 4$

- **P**ara sumar o restar polinomios, debemos ordenar y completar los polinomios, luego se suman o restan sus monomios semejantes.

Ejemplos: suma resta

a) $P(x) + Q(X) = 4x^3 – 2x^2 + 5x - 3$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ +\ \underline{2x^3 + 6x^2 - x - 4} \\ 6x^3 + 4x^2 - x\ \ - 4 \end{array}$$

b) $P(x) - Q(X) = 4x^3 – 2x^2 + 5x - 3$

$$\begin{array}{r} 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ \underline{-\ (2x^3 + 6x^2 - x - 4)} \\ 2x^3 - 8x^2 + 6x + 1 \end{array}$$

1) Dados los siguientes polinomios

$P(x) = 2x^3 + 2 - 1$ $Q(x) = \frac{3}{8}x^5 - 2x^3 - 3$ $R(x) = -x + 2x^2 - 2x^4$

a) P(x) + R(x)

b) Q(x) + P(x)

c) R(x) – Q (x)

d) P(x) – Q (x)

MULTIPLICACION DE POLINOMIOS

TEORIA

⇨ Para multiplicar dos polinomios, se debe aplicar la propiedad distributiva y la propiedad del producto de potencia de igual base.

Para recordar

Producto de potencias **de igual base** ⇨ $a^n . a^m = a^{n+m}$

Distributiva respecto de la **multiplicación** ⇨ $(a . b)^n = a^n . b^n$

Ejemplo:

$$(-2x^3 + 5x).(3x^2 - 4x) = -2x^3 . 3x^2 - 2x^3 .(-4x) + 5x . 3x^2 + 5x .(-4x)$$

$$= -6x^5 + 8x^4 + 15x^3 - 20x^2$$

Por ejemplo:

Sean los polinomios: $P(X) = 4X^3 + 5X^2 - \frac{1}{2}X$ y $Q(X) = 6X^2 + 2$

Calcular: $P(X) \; . \; Q(X) =$

Sustituimos los polinomios: ⇨ $(4X^3 + 5X^2 - \frac{1}{2}X) \; . \; (6X^2 + 2X) =$

Aplicamos la propiedad distributiva y del producto de potencias de igual base: $X^3 . X^2 = X^5$ (los exponentes se suman).

⇨ $24X^5 + \boxed{30X^4} - 3X^3 + \boxed{8X^4} + 10X^3 - 1X^2$

$24X^5 + \boxed{38X^4} + 7X^3 - X^2$ ⇦ Operamos los términos semejantes.

No es necesario escribir el 1

OPERACIONES COMBINADAS

Para resolver operaciones combinadas con polinomios se procede respetando la jerarquía de las operaciones. Se resuelven en el siguiente orden:

1) Paréntesis, corchetes y llaves.
2) Potencias y raíces
3) Productos y cocientes
4) Sumas y restas

Por ejemplo:

Sean los polinomios $P(X) = 4X^3 + 5X^2 - 3X$ $\quad Q(X) = 6X^2 - X^3 + 2$ $\quad R(X) = X^2 - 5$

Calcular: $-2\,P(X) \; - \; Q(x) \; . \; R(X) =$

Sustituimos los polinomios y separamos en términos ⇨ $-2\,(4X^3 + 5X^2 - 3X) \; - \; (X^2 - 5) \; . \; (6X^2 - X^3 + 2) =$

$-8X^3 - 10X^2 + 6X \; - \; (6X^4 - 30X^2 - X^5 + 5X^3 + 2X^2 - 10) =$

Se multiplica aplicando propiedad distributiva ⇨ $-8X^3 - 10X^2 + 6X \; - \; 6X^4 + 30X^2 + X^5 - 5X^3 - 2X^2 + 10 =$

Se operan los términos semejantes ⇨ $-X^5 - 6X^4 - 13X^3 + 18X^2 + 6X + 10$

1) Luego de leer y analizar la teoría, resolver los ejercicios
   a) Resolver los siguientes productos. Ordenar el resultado en forma creciente.

I. $(6\,x^3 - 3\,x^2 + 12\,x)\,.\,(-\,x^2) =$

II. $(\frac{-2}{3}x^2).\,(8x^3) =$

III. $(\frac{1}{6}\,x + x^3).\,(2\,x - 3\,x^2 + 1) =$

b) Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = 3\,x^3 + 2$ $\quad Q(x) = \frac{3}{8}\,x^5 - x^3 - 1$ $\quad R(x) = -\,2\,x + 2\,x^2 - x^6$

Resolver los siguientes cálculos combinados. Ordenar el resultado en forma decreciente.

a) $-\,P(x) + Q(x)\,.\,R(x) =$

b) $R(x)\,.\,Q(x) + P(x) =$

c) $2\,.\,[P(x) - Q(x)] + R\,(x) =$

Recursos sugeridos

Actividad 1: https://www.youtube.com/watch?v=9vIwvR-juSo

Actividad 2: https://www.youtube.com/watch?v=MCbKYBUeE3U

Actividad 4: https://www.youtube.com/watch?v=lzeFHIDzCeE

Actividad 5: https://www.youtube.com/watch?v=JaSXPJXz_r8

https://www.youtube.com/watch?v=eGfNV7mbGFE

Actividad 6: https://www.youtube.com/watch?v=6chbvAy44xQ

https://www.youtube.com/watch?v=-d3pb1p3vcc

IGUALDADES NOTABLES

Las igualdades notables son identidades que podemos utilizar para hacer los cálculos más sencillos.

Las que vamos a ver en esta clase son:

1) Cuadrado de un binomio.
2) Cubo de un binomio.
3) Suma por diferencia.

Definición de Binomio :

Expresión algebraica formada por la suma o la diferencia de dos términos o monomios. (a+ b) es un binomio.

1.- Cuadrado de la suma de un Binomio

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primer término **más** el doble del producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Cuadrado de una suma

Demostración:

$(\mathbf{a+b})^{\mathbf{2}} = (a+b).(a+b)$ aplicamos la propiedad distributiva

$= a.a + a.b + b.a + b.b$

$= a^2 + 2ab + b^2$

Ejemplo:

$(\mathbf{x+1})^{\mathbf{2}} = x^2 + 2x\cdot 1 + 1^2 = \mathbf{x^2 + 2x + 1}$ ✓

2.- Cuadrado de una diferencia de un Binomio

El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primer término **menos** el doble del producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Cuadrado de una diferencia

Demostración:

$(\mathbf{a-b})^2 = (a-b).(a-b)$ aplicamos la propiedad distributiva

$= a.a + a.(-b) + (-b).a + (-b).(-b)$

$= \mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$

Ejemplo:

$(x-1)^2 = x^2 - 2x.1 + 1^2 = x^2 - 2x + 1$ ✓

3.-Cubo de una suma de un Binomio

El cubo de una suma es igual al cubo del primer término más el triple del cuadrado del primero por el segundo más el triple del primero por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Cubo de una suma

Demostración:

$(\mathbf{a+b})^3 = [(a+b).(a+b)].(a+b)$

$= [(a+b)^2].(a+b) \longrightarrow$ [desarrollo el cuadrado de una suma]

$= [a^2 + 2ab + b^2].(a+b) \longrightarrow$ aplico la propiedad distributiva

$= a^2.a + a^2.b + 2ab.a + 2ab.b + b^2.a + b^2.b$

$= a^3 + (a^2.b + 2a^2b) + (2ab^2 + b^2.a) + b^3 \longrightarrow$ resuelvo

$= a^3 + (3a^2.b) + (3ab^2) + b^3$

$= \mathbf{a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3} \longrightarrow$ ordeno

Ejemplo:

$(\mathbf{x+1})^3 = x^3 + 3x^2.1 + 3x.1^2 + 1^3$

$= \mathbf{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$ ✓

Cubo de una diferencia de un Binomio

El cubo de una diferencia es igual al cubo del primer término menos el triple del cuadrado del primero por el segundo más el triple del primero por el cuadrado del segundo menos el cubo del segundo.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Cubo de una diferencia

Demostración:

$$(a-b)^3 = [(a-b)\cdot(a-b)]\cdot(a-b)$$

$$= (a^2 - 2ab + b^2)\cdot(a-b) \quad \text{(aplicar la regla de los signos)}$$

$$= a^2.a - a^2.b - 2ab.a + 2ab.b + b^2.a - b^2.b$$

$$= a^3 \underline{- a^2.b - 2a^2b} \underline{+ 2ab^2 + b^2.a} - b^2.b$$

$$= a^3 \quad \underline{-3a^2b} \quad \underline{+3ab^2} \qquad -b^3$$

Ejemplo:

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2\cdot 1 + 3x\cdot 1^2 - 1^3$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \checkmark$$

4.-Suma *por* diferencia

Una suma de dos términos multiplicada por la diferencia de los mismos términos es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos términos.

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Suma por diferencia.

Demostración:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a.a + a.(-b) + b.a + b.(-b) \quad \text{aplicamos la propiedad distributiva}$$

$$= a^2 - a.b + b.a - b^2 \longrightarrow (-a.b + b.a) = 0$$

$$= a^2 - b^2$$

Ejemplo:

$$(x+3)\cdot(x-3) = x^2 - x.3 + 3.x - 3.3 \longrightarrow (-x.3 + 3.x) = 0$$

$$= x^2 - 3^2$$

$\checkmark$

$= x^2 - 9$

Resumiendo:

IDENTIDADES NOTABLES

Fórmula del binomio al cuadrado

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2}$$

Fórmula de la suma por diferencia

$$\boxed{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$$

Fórmula del binomio al cubo

$$\boxed{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3}$$

Ejercitación

1.-Colocar verdadero o falso según corresponda:

a) $(x + 2)^2 = x^2 + 4$ ☐
b) $(x - 3)^2 = x^2 - 6x - 9$ ☐
c) $(x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + x + 0{,}25$ ☐
d) $(x + 3)^2 = x^2 + 9 + 6x$ ☐
e) $(3x + 1)^2 = 3x^2 + 6x + 1$ ☐
f) $(-x - 1)^2 = -x^2 + 2x - 1$ ☐

2.- Desarrollar los siguientes cuadrados:

a) $(2x^2 + 3x)^2 =$

b) $(x^3 - x^2)^2 =$

c) $(-5x^4 + x^5)^2 =$

3.- Desarrollar los siguientes cubos:

a) $(x + 5)^3 =$

b) $(-x - 3)^3 =$

c) c) $(2x + 7)^3 =$

d) $(-x^2 + 4x)^3 =$

e) $(5x^3 - 2x^2)^3 =$

4.-Resolver las siguientes suma por diferencia:

a) $(3 - x).(3 + x) =$

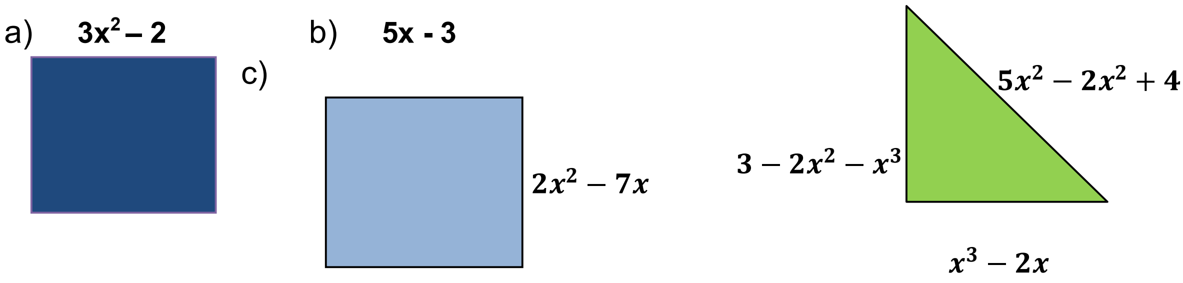
b) $\left(2x - \frac{1}{3}x^2\right).\left(2x + \frac{1}{3}x^2\right) =$

Recuerda que, al elevar una fracción a un exponente, elevamos a dicho exponente el numerador y el denominador de la misma.

c) $(x^2 - \sqrt{5}).(x^2 + \sqrt{5}) =$

d) $(x^2 - 3).(x^2 + 3) =$

5.-Hallar la expresión del perímetro y del área de cada figura.



Soluciones:

a) Perímetro = $12x^2 - 8$
Área = $9x^4 - 12x^2 + 4$

b) Perímetro = $4x^2 - 4x - 6$
Área = $10x^3 - 41x^2 + 21x$

c) Perímetro = $5x^3 - 4x^2 - 2x + 7$
Area = $-\frac{1}{2}x^6 - x^5 + x^4 + \frac{7}{2}x^3 - 3x$

DIVISION DE POLINOMIOS

Para dividir un polinomio por un monomio , se debe aplicar la propiedad distributiva y la propiedad del cociente de dos potencias de igual base:

$$x^n : x^m = x^{n-m}$$

Ejemplos:

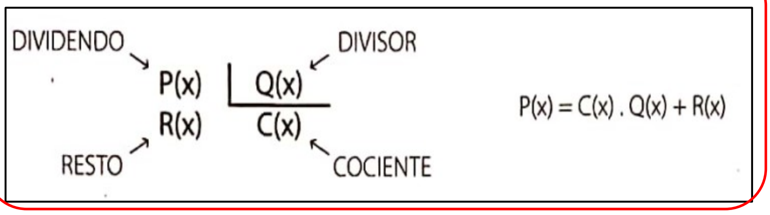
$-20x^6 : (4x^4) = -5x^2$ ✓

$(-3x^4 + 2x^6 - 6x^3 - 4x^2) : (12x^2) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$ ✓

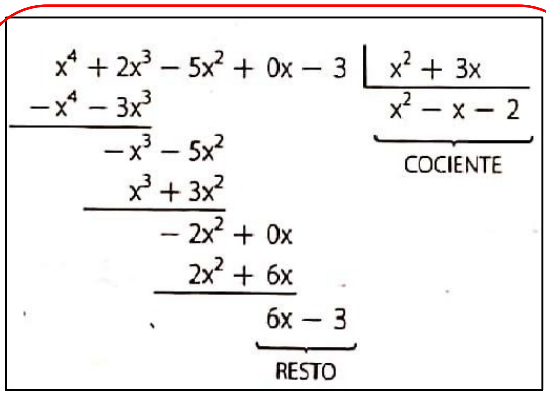
Para dividir dos polinomios hay que aplicar **un algoritmo** y se debe cumplir que:

- El **grado** del polinomio dividendo debe ser **mayor** o igual que el del polinomio divisor.
- El polinomio dividendo debe estar **completo y ordenado** en forma **decreciente.**
- El polinomio **divisor** debe estar **ordenado**.

- El **grado** del polinomio **resto** debe ser **menor** que el grado del polinomio **divisor**.



Ejemplo 1: $(-5x^2 + 2x^3 - 3 + x^4)$ **:** $(3x + x^2) = \underbrace{(x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 0x - 3)}_{\substack{\textbf{Completo y ordenado} \\ \text{(dividendo)}}}$ **:** $\underbrace{(x^2 + 3x)}_{\substack{\textbf{ordenado} \\ \text{(divisor)}}}$



Este método sirve para dividir cualquier tipo de polinomios y para realizarlo hay que tener en cuenta las propiedades anteriores.

Ejemplo 2:

$(2x^3 + x^5 - x - 8)$: $(- 2x + x^2 + 1) = (x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x - 8)$: $(x^2 - 2x + 1)$

1. Al polinomio dividendo lo **ordenamos** de manera decreciente, si no está completo lo **completamos** con **coeficientes cero** en los lugares que correspondan, y al polinomio divisor solamente lo ordenamos.

$$\mathbf{x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x - 8 \;\underline{\big|\; x^2 - 2x + 1}}$$

2. Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

$$x^5 : x^2 = x^3$$

3. **Multiplicamos** cada término del polinomio divisor (x^2 **- 2x +1**) por el resultado anterior (x^3) y lo **restamos** del polinomio dividendo

$$\begin{array}{l|l} x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -x^5 + 2x^4 - x^3 & x^3 \\ \hline \qquad 2x^4 + x^3 + 0x^2 - x - 8 & \end{array}$$

$x^2 \cdot x^3 = x^5$

$-2x \cdot x^3 = -2x^4$

$1 \cdot x^3 = x^3$

4. Volvemos a **dividir** el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. Y el resultado lo multiplicamos por cada termino del divisor y lo restamos al dividendo.

$$2x^4 : x^2 = 2x^2$$

5. Procedemos igual que antes

$$\begin{array}{l|l} x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -x^5 + 2x^4 - x^3 & x^3 + 2x^2 \\ \hline \qquad 2x^4 + x^3 + 0x^2 - x - 8 & \\ \qquad -2x^4 + 4x^3 - 2x^2 & \\ \hline \qquad\qquad 5x^3 - 2x^2 - x - 8 & \end{array}$$

$x^2 \cdot 2x^2 = 2x^4$

$-2x \cdot 2x^2 = -4x^3$

$1 \cdot 2x^2 = 2x^2$

Volvemos a dividir $\longrightarrow$ $5x^3 : x^2 = 5x$

$$\begin{array}{l|l} x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 - x - 8 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} -x^5 + 2x^4 - x^3 & x^3 + 2x^2 + 5x \\ \hline \qquad 2x^4 + x^3 + 0x^2 - x - 8 & \\ \qquad -2x^4 + 4x^3 - 2x^2 & \\ \hline \qquad\qquad 5x^3 - 2x^2 - x - 8 & \\ \qquad\qquad -5x^3 + 10x^2 - 5x & \\ \hline \qquad\qquad\qquad 8x^2 - 6x - 8 & \end{array}$$

$x^2 \cdot 5x = 5x^3$

$-2x \cdot 5x = -10x^2$

$1 \cdot 5x = 5x$

Volvemos a dividir $\longrightarrow$ $8x^2 : x^2 = 8$

Hasta que el <u>resto</u> sea de grado menor que el grado del <u>divisor</u>.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +\ 0x^4 & +\ 2x^3 & +\ 0x^2 & -\ x & -\ 8 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{7-7}
-\ x^5 & +\ 2x^4 & -\ x^3 & & & & x^3 + 2x^2 + 5x + 8 \\ \cline{1-6}
 & 2x^4 & +\ x^3 & +\ 0x^2 & -\ x & -\ 8 & \\
 & -2x^4 & +\ 4x^3 & -\ 2x^2 & & & \\ \cline{2-6}
 & & 5x^3 & -\ 2x^2 & -\ x & -\ 8 & \\
 & & -5x^3 & +\ 10x^2 & -\ 5x & & \\ \cline{3-6}
 & & & 8x^2 & -\ 6x & -\ 8 & \\
 & & & -8x^2 & +\ 16x & -\ 8 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 10x & -\ 16 &
\end{array}
$$

Es el cociente

$x^2 \,.\, 8 = 8x^2$

$-2x \,.\, 8 = -16x$

$1 \,.\, 8 = 8$

Es el resto porque su grado es menor que el divisor y por lo tanto no se puede continuar dividiendo.

Para entender el procedimiento te invito a mirar el siguiente tutorial

https://www.youtube.com/watch?v=uDUr3TKE8IQ

EJERCITACIÓN

1.- Resolver las siguientes divisiones de un polinomio por un monomio.

a) $(-20x^3 + 15x - 25x^2) : (-5x) =$

b) $(-2x^4 + 5x^2 - 10x + 4x^3) : (10x) =$

c) $\left(\frac{3}{4}x^7 - \frac{5}{8}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{6}x^6\right)(-0{,}5x^3) =$

d) $(x^5 - 12x^8 + 9x^6 - 6x^4) : \left(\frac{3}{2}x^4\right) =$

2.- Hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones.

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x - 4) : (x + 1) =$ Rta: cociente $x^2 - 4x + 6$ resto -10

b) $(5 - 2x^3 + x) : (x - 2) =$ Rta: cociente $-2x^2 - 4x - 7$ resto -9

c) $(x^3 + 19x - 8 - 9x^2) : (x - 3) =$ Rta: cociente $\frac{1}{2}x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{31}{8}$ resto $\frac{29}{8}$

d) $(-8x^2 - 5 + x^4) : (x + 3) =$ Rta: cociente $x^3 - 3x^2 + x - 3$ resto 4

Regla de Ruffini

Es un algoritmo que permite obtener el cociente y resto de la división de un polinomio por un binomio de la forma *x – a.*

Ejemplo: $(6x^3 - 3x + 4) \div (x - 2)$

Vamos a hacer la siguiente división por Ruffini:

$(6x^3 - 3x + 4) \div (x - 2)$
dividendo divisor

$(6x^3 + 0x^2 - 3x + 4)$	Se ordena en forma decreciente el dividendo. Si en el polinomio dividendo faltan términos, como en este caso que es incompleto, se ponen ceros en los lugares de los términos que faltan.
$(x - 2)$ → 2	Del divisor se coloca el término independiente cambiado de signo. Por lo que quedaría; 2 positivo.

$(6x^3 + 0x^2 - 3x + 4)$. Del dividendo tomamos los coeficientes

6 0 - 3 4

Del divisor nos quedaría la expresión 2

1.El primer coeficiente del cociente es igual al primer coeficiente del dividendo; por eso el número 6 se baja simplemente.

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & & & & \\ \hline & 6 & & & \end{array}$$

2. El segundo coeficiente del cociente se obtiene según indica el esquema:

$2 \cdot 6 = 12$

$$\begin{array}{r} 0 \\ +\,12 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & & 12 & & \\ \hline & 6 & 12 & & \end{array}$$

3. El tercer coeficiente del cociente se obtiene según indica el esquema:

$2 \cdot 12 = 24$

$$\begin{array}{r} -3 \\ +24 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 6 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & & 12 & 24 & \\ \hline & 6 & 12 & 21 & \end{array}$$

4. El resto se obtiene como se indica en el esquema:

2 . 21 = 42

$$\begin{array}{r} 4 \\ +\,42 \\ \hline 46 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 6 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & & 12 & 24 & 42 \\ \hline & \underbrace{6 \quad 12 \quad 21}_{\text{Cociente}} & & & \boxed{46}\ \to \text{resto} \end{array}$$

Como el grado del cociente es una unidad menor que el grado del dividendo, resulta que el cociente es el polinomio:

$C(x) = 6x^2 + 12x + 21$
y el resto $R = 46$

Ejercitación

a) $(-3x^5 +4x^3 -5x +1) : (x – 2)$
b) $(2x^4 -3x^2 +5x+1) : (x – 2)$
c) $(x^5 + 7) : (x + 2)$
d) $(x^4 +x^3 -6x^2 -4x +8) : (x – 1)$
e) $(2x^5 -3x^4 +4x^3 -5x^2 +3x +1) : (x + 2)$
f) $(-2x^4 +3x^2 -5) : (x – 3)$
g) $(x^5 +4x^4 -5x +1) : (x + 1)$
h) $(x^4 -3x^3 +4x^2 +3x -5) : (x – 5)$
i) $(4x^4 -2x +1) : (x + \frac{1}{2})$
j) **$(3x^5-4x^4-6x^2-7x): (x+2)=$**

Teorema del Resto

Con el teorema del resto podemos calcular el resto de una división sin tener que hacerla, siempre que dividamos un polinomio por un binomio de la forma x - a.

Es decir:

Si queremos saber el resto de la división P(x): Q(x) siendo:

$P(x)= 2x^2 +3x -2$
$Q(x)= x - 2$

$(2x^2 +3x -2): (x - 2) =$
Aplicamos el teorema:

Identificamos en primer lugar "a". Del divisor (x - 2) colocamos el término independiente cambiado de signo en este caso a = **2**.
Ahora calculamos el valor numérico del polinomio para a = **2** en $P(x)= 2x^2 +3x - 2$
Reemplazando nos quedaría

$$P(x)= 2\mathbf{x}^2 +3\mathbf{x} -2$$

$$P(2)= 2.\mathbf{2}^2+3.\mathbf{2}-2=\boxed{\mathbf{12}}$$

Por lo que nos quedaría el resto de la división = 12

$$\boxed{R = 12}$$

Ejercitación

Calcula el resto de la división de polinomios P(x) : Q(x) en cada caso, usando el teorema del resto:

1 $P(X) = 5x^2 - x + 1$ $\quad Q(x) = x - 1$

Resto =

2 $P(x) = x^3 + 7x^2 - 1$ $\quad Q(x) = x - 5$

Resto =

3 $P(x) = x^2 - 9$ $\quad Q(x) = x + 3$

Resto =

4 $P(x) = (3x^5 + 2)$ $\quad Q(x) = x - 1$

Resto =

5 $P(X) = -3x^4 + 2x^3 - 7x$ $\quad Q(x) = x - 2$

Resto =

6 $P(x) = x^5 + 4x^2$ $\quad Q(x) = x + 3$

Resto =

7 $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5$ $\quad Q(x) = x + 4$

Resto =

8 $P(x) = (x^3 - 4x^2 + 3x - 1)$ $Q(x) = x - \frac{1}{3}$

Resto =

Factorización de Polinomios

- Factor común
- Factor por grupos
- Diferencia de cuadrados
- Trinomio cuadrado perfecto
- Cuatrinomio cubo perfecto

Factor común

Se dice que un polinomio tiene factor común cuando una misma cantidad, ya sea número o letra, se encuentra en todos los términos del polinomio.

Extraer factor común (de una suma o resta) consiste en escribirla como un producto. Por ejemplo

Ejemplo 1

En la suma 2y + 2x tenemos el factor común 2. Podemos extraerlo:

$2.y + 2.x =$

$\boxed{2.(y + x)}$

Lo que hacemos es aplicar la **propiedad distributiva** del producto sobre la suma.

Debemos colocar paréntesis porque el factor común (2) debe multiplicar a **todos** los sumandos.

Ejemplo 2

En la suma 3y+6x podemos extraer el factor común 3:

$\mathbf{3.y + 6.x =}$

$\mathbf{3.y + 2.3.x =}$

$\boxed{\mathbf{3.(y + 2.x)}}$

Nota: tuvimos que escribir 6 como 3·2 para tener explícitamente el factor común.

Algunas veces, extraemos factor común, aunque el factor que extraemos no esté escrito explícitamente en todos los sumandos

Ejemplo 3

Extraemos el factor común x^2 del polinomio $3x^2 - 5x^3$

$3.x^2 - 5.x^3 =$

$3.x^2 - 5.x.x^2 =$

$\boxed{X^2. (3 - 5x)}$

Nota: tuvimos que escribir x^3 como $x.x^2$ para tener explícitamente el factor común.

O también tomamos como factor común la expresión que tiene el exponente **menor**. En el ejemplo $3.x^2 - 5.x^3$ observamos que el exponente 2 es menor que el exponente 3, por lo tanto nos quedamos con 2, y nos quedaría x^2 como factor común

Ejemplo 4

Podemos extraemos factor común $3y^2$ del polinomio $9xy^5 - 12y^2 + 6x^2y^4$

$9.x.y^5 - 12.y^2 =$

$3.3.x.y^2.y^3 - 4.3.y^2 =$

$\boxed{3y^2. (3xy^3 - 4)}$

Nota: De $9.x.y^5 - 12.y^2$ observamos en el primer término y^5, en el segundo término y^2. Entonces tomamos como factor común la expresión que tiene el exponente **menor**, es decir y^2. Por lo tanto y^2 será factor común.

Ejercitación

a) $6 + 2x =$
b) $4x^2 + 10 =$
c) $8 + 2x^2 + 12x^3 =$
d) $y + y^3 =$
e) $7x - 2x^2 =$
f) $4x^3 + 6xy^3 =$
g) $5x^3y^2 - 10xy^4 =$
h) $6x^3y + 2y^5 - 4xy^2 =$
i) **$9ab^2 + 3ab - 6a^2b =$**
j) $3x^2 - 6xy + 18x^2 - 9x^5y =$

Factor por grupos

Se llama factor común por agrupación de términos, si los términos de un polinomio pueden reunirse en grupos de términos con un factor común diferente en cada grupo.

Ejemplo 1

$$2ax + 2bx - ay + 5a - by + 5b$$

Agrupo los términos que tienen un factor común:

$$(2ax - ay + 5a) + (2bx - by + 5b)$$

Saco el factor común de cada grupo:

$$a(2x - y + 5) + b(2x - y + 5)$$

Como las expresiones encerradas entre paréntesis son iguales, nos quedaría:

$$\boxed{\mathbf{(2x - y + 5) \cdot (a + b)}}$$

Ejemplo 2

$$am + bm + a^2 + ab$$

Formando grupos con términos que tengan factores comunes:

$$(am + bm) + (a^2 + ab)$$

Aplicando Factor Común a cada grupo:

$$m.(a + b) + a.(a + b)$$

Como las expresiones encerradas entre paréntesis son iguales, nos quedaría:

$$\mathbf{(a + b) \cdot (m + a)}$$

Ejercitación

a) $6ax + 3a^2 - 4bx - 2ab$
b) $6a^2x + 4ab + 2a - 3abx - 2b^2 - b$
c) $m^2 + mn + mx + nx$
d) $3x^3 - 1 - x^2 + 3x$
e) $ax - bx + ay - by$
f) $2y^3 - 6ay^2 - y + 3a$
g) $am - 2bm - 3an + 6bn$
h) $4a^2x - 5a^2y + 15by - 12bx$
i) $m^2p^2 - 3np^2 + m^2z^2 - 3nz^2$

Diferencia de cuadrados

Se le llama diferencia de cuadrados al binomio conformado por dos términos a los que se les puede sacar **raíz cuadrada exacta**

Al estudiar identidades notables teníamos que:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

En donde el resultado es una diferencia de cuadrados, pero para este caso será lo contrario:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Pasos a seguir:

$X^2 - y^2$ $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ X Y	Se extrae la raíz cuadrada de ambos términos
$(x + y) . (x - y)$	Se multiplica la suma por la diferencia de estas cantidades

Ejemplo 1. Factorizamos $16m^2 - 9n^2$

$16m^2 - 9n^2 =$

Calculamos raíz cuadrada

$4m$ $3n$

Lo escribimos $(4m + 3n) . (4m - 3n)$

Por lo tanto, nos quedaría

$\boxed{16m^2 - 9n^2 = (4m + 3n) . (4m - 3n)}$

Nota: calculamos $\sqrt{m^2}$

$\sqrt{m^2} = m^1$

1 es la mitad de 2

Ejemplo 2. Factorizamos $4x^4 - 25$

$4x^4 - 25$

Calculamos la raíz cuadrada

$2x^2$ $\quad$ 5

Nota: calculamos $\sqrt{x^4}$

$\sqrt{x^4} = x^2$

2 es la mitad de 4

Lo escribimos $(2x^2 + 5) . (2x^2 - 5)$

Por lo tanto, nos quedaría

$4x^4 - 25 = (2x^2 + 5) . (2x^2 - 5)$

Ejercitación

1) $x^2 - 9$
2) $x^2 - 1$
3) $x^2 - 49$
4) $81 - x^2$
5) $16x^2 - 9$
6) $a^4 - b^4$
7) $4a^4 - 9b^2c^2$
8) $49x^2 - \frac{16}{25}$
9) $\frac{16}{9}x^2 - \frac{1}{25}$
10) $(2x+3)^2 - (x-1)^2$

Trinomio cuadrado perfecto

Se llama ***trinomio cuadrado perfecto*** al trinomio (polinomio de tres términos) tal que, dos de sus términos son cuadrados perfectos y el otro término es el doble producto de las bases de esos cuadrados.

Para reconocerlo se deben tomar en cuenta los siguientes puntos:

- Debe tener tres términos, y estar ordenado con respecto a una letra.
- Dos de sus términos, el 1º y 3°, deben poseer raíz cuadrada exacta
- El segundo término debe ser igual al doble producto de, la raíz del 1° y 3° termino

Por ejemplo

$49a^2 + 14ab^2 + b^4$

Es un trinomio cuadrado perfecto

$49a^2 + 14ab^2 + b^4$ $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ $7a$ b^2	calculamos la raíz cuadrada del primer y tercer termino
$2 \cdot 7a \cdot b^2 = 14ab^2$	Resolvemos el doble producto de esas raíces
$14ab^2 = 14ab^2$	Ahora comprobamos. Nos debe dar igual al segundo término del polinomio
$49a^2 + 14ab^2 + b^4 = (7a + b^2)^2$	Por ultimo nos quedaría factorizado de la siguiente manera. Colocamos el signo del segundo término del polinomio y elevamos al cuadrado

Ejercitación

a) $x^2 +6x +9$

b) $4x^2 +9y^2 -12xy$

c) $a^2 +8a +16$

d) $m^2 -10m +25$

e) $n^2 -8n +16$

f) $x^2 -6x +9$

g) $x^2 +12x +36$

h) $9a^2 -30a +25$

i) $121c^2 -132c +36$

j) $\frac{1}{25}+\frac{25}{36}b^4-\frac{b^2}{3}$

Cuatrinomio cubo perfecto

Por ejemplo

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 =$

es un cuatrinomio cubo perfecto

Para reconocerlo se deben tomar en cuenta los siguientes puntos:

- Debe tener cuatro términos, y estar ordenado con respecto a una letra.
- Dos de sus términos, el primero (a^3) y el cuarto (b^3), deben poseer raíz cúbica exacta.
- El segundo término debe ser igual al triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del cuarto termino
- El tercer término debe ser igual al triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del cuarto termino
- El segundo y el cuarto termino deben tener el mismo signo y puede ser positivo o negativo, el primer y tercer término siempre son positivos (si el primer y tercer término son negativos realizar factor común con el factor -1).

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $\sqrt[3]{\ }$ $\sqrt[3]{\ }$ a b	Calculamos la raíz cubica del primer y cuarto termino
$3.(a)^2 . b = 3a^2b$	El segundo término debe ser igual al triple producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del cuarto termino
$3. a. (b)^2 = 3ab^2$	El tercer término debe ser igual al triple producto de la raíz cubica del primer término por el cuadrado de la raíz cubica del cuarto termino
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$	Por ultimo nos quedaría factorizado de la siguiente manera. Colocamos el signo del segundo término del polinomio y elevamos al cubo

Ejercitación

a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
b) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
c) $x^3 + 3/2\, x^2 + 3/4\, x + 1/8$
d) $64x^3 + 144x^2 + 108x + 27$
e) $a^3b^3 + 3a^2b^2x + 3abx^2 + x^3$
f) $x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$
g) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

UNIDAD Nº3: Algebra y Funciones

Una función f es una relación entre dos variables en la que a cada valor de la variable independiente **x** le corresponde un *único valor de la variable dependiente* **y**. Se dice que **y** es función de **x**, o que ***y = f(x)***

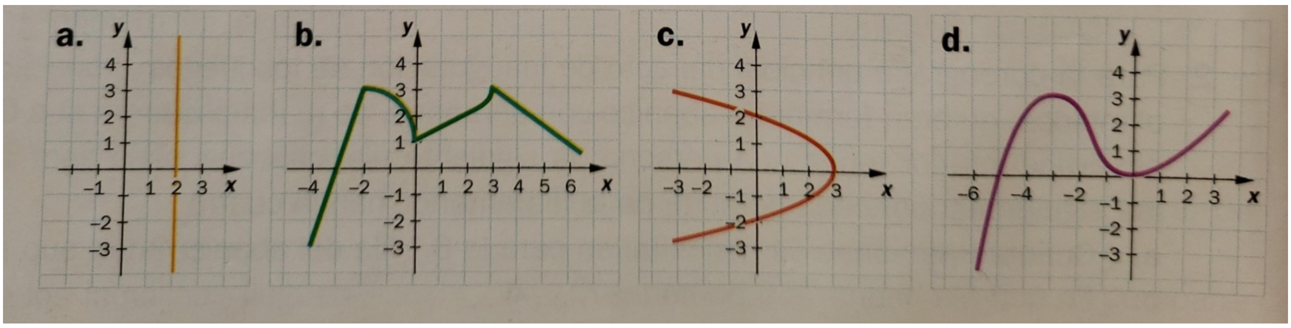
DOMINIO E IMAGEN DE UNA FUNCION

El dominio de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente **x**, se simboliza **Dom *f***

La imagen de una función es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente **y**, se simboliza **Im *f***

Actividad 1: Indica cuales de estos graficos corresponden a una función ***f*** .   (ver el video)

https://www.youtube.com/watch?v=0CvNjR52Zqw&t=223s



FUNCION AFIN

Es una función cuya grafica es una línea recta, por lo que también se le denomina función lineal.

La expresión general de una función afin es: **y = m.x + b**   donde m y b son números reales llamados pendiente y ordenada al origen respectivamente.

Pendiente

y = mx + b

Ordenada al origen

La pendiente m se relaciona con la inclinación de la recta.

- Si m es mayor que cero, la función es creciente
- Si m es menor que cero, la función es decreciente
- Si m es igual a cero , la función es constante

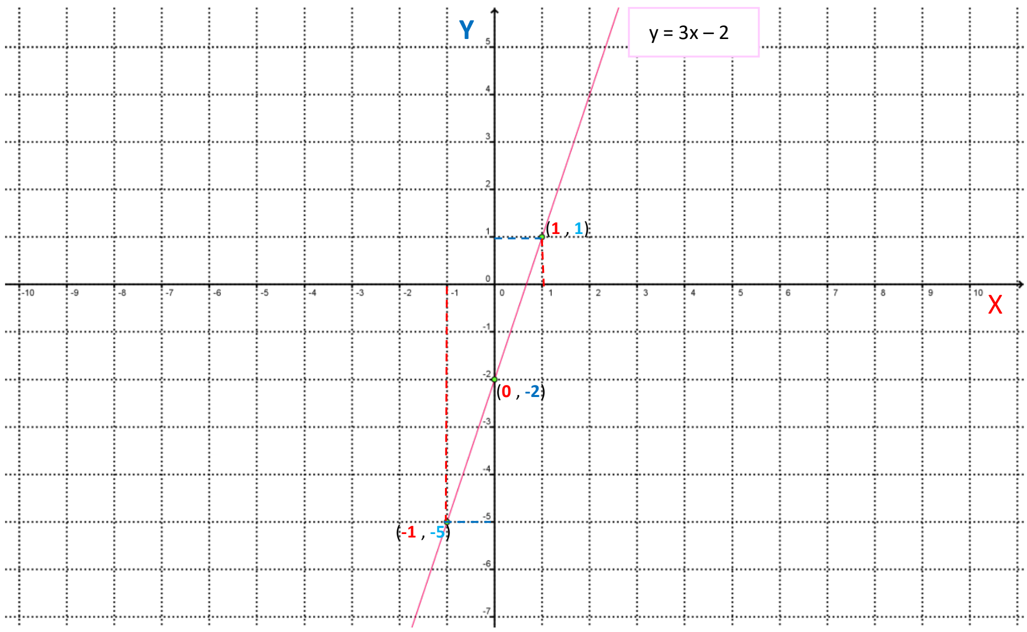
La ordenada al origen b indica en qué punto la grafica de la función corta al eje y

Ejemplo $y = 3x - 2$ es una función afín cuya pendiente m = 3 y su ordenada al origen es b = - 2

Para graficar la función, le asignaremos valores a la variable independiente x, luego sustituimos estos valores en la función para hallar los valores de la variable dependiente y.

x	**y = 3.x - 2**	Par odenado (x , y)
0	y = 3.**0** – 2 = 0 – 2 = **- 2**	(0 , -2)
1	y = 3.**1** – 2 = 3 – 2 = **1**	(1 , 1)
-1	y = 3.**(-1)** – 2 = -3 – 2 = **-5**	(-1 , -5)

Finalmente, ubicamos los puntos en el sistema de ejes cartesianos, y los unimos para trazar la recta.



<u>**Actividad 2:**</u> Completa las tablas y grafica las rectas.

a)

x	**y = 2x + 1**	Par ordenado (x , y)
0		
1		
-1		

b)

x	**y = 5x - 3**	Par ordenado (x , y)
0		
1		

-1		

c)

x	**y = -3.x + 4**	Par ordenado (x , y)
O		
1		
-1		

d)

x	**y = 3.x - 2**	Par ordenado (x , y)
O		
1		
-1		

Ayuda para la actividad 2 https://www.youtube.com/watch?v=AoZpzAoC1Qg

Actividad 3: Alquilar un auto cuesta $ 600 más un adicional de $ 25 por km Recorrido.

a) Completa la tabla
b) Si el gasto total del alquiler fuera $ 3.600. ¿Cuantos kilómetros se recorrieron?
c) Escribe la fórmula que permite calcular el gasto del alquiler y en función del recorrido x en km.
d) La formula ¿corresponde a una función afín? Justifica tu respuesta.

x Recorrido km	y Gasto total ($)
50	y = 25.50 + 600 = 1850
100	
150	
200	
x	

PENDIENTE Y ORDENADA AL ORIGEN. INTERPRETACIÓN GRAFICA

La grafica de la recta también se puede realizar a empleando la pendiente **m** y la ordenada al origen **b**.

$$\textbf{Ejemplo: } \boldsymbol{y = \frac{3}{5}x - 1}$$

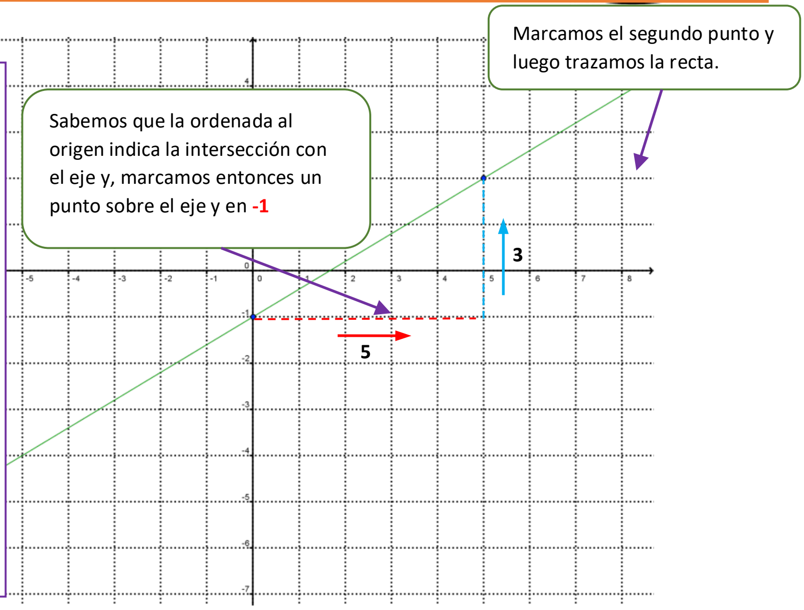
La pendiente es **m** $= \frac{3}{5}$

La ordenada al origen es **b** = -1

La pendiente **m** de la recta es el cociente entre la variación de de la variable dependiente y la variación de la variable independiente de cualquier punto de la misma, es decir:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{5}$$

La pendiente es positiva, por lo tanto la función es ***creciente.***



Si la pendiente es negativa, la función es *decreciente.*

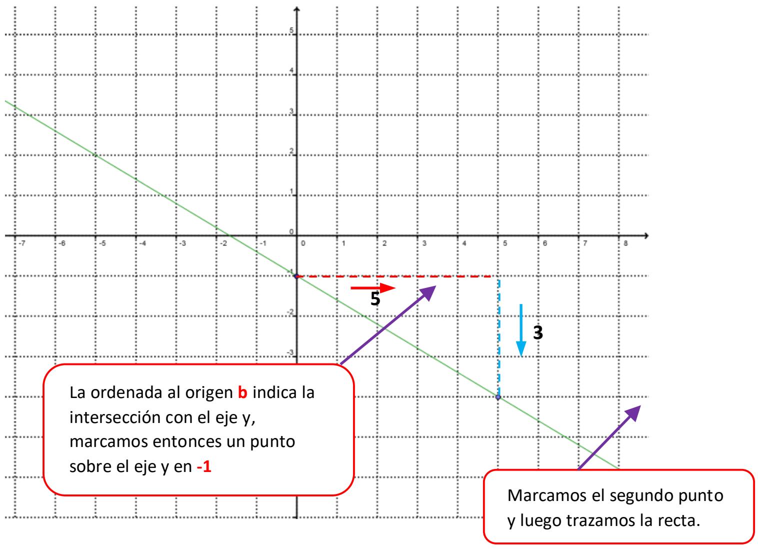
Ejemplo: $y = -\frac{3}{5}x - 1$

La pendiente es **m** $= -\frac{3}{5}$

La ordenada al origen es **b** = -1

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{5}$$

La pendiente es negativa, la función será ***decreciente.***



Actividad 4: empleando la ordenada al origen y la pendiente, grafica la recta

a) $y = \frac{1}{2}x + 3$

b) $y = \frac{5}{4}x - 2$

c) $y = x + 1$

d) $y = -\frac{4}{3}x + 5$

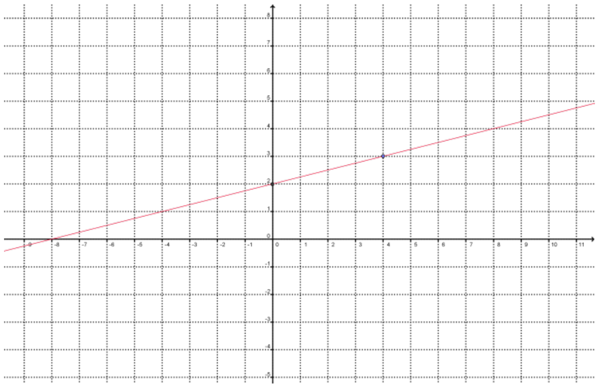
e) $y = -3x$

Ayuda para esta actividad: https://www.youtube.com/watch?v=lHfUDI0xmsU

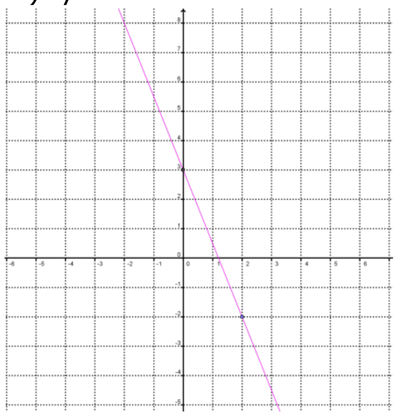
Actividad 5: Observa la grafica, y escribe la ecuación de la recta

Para ver una explicación https://www.youtube.com/watch?v=k2_7L5Q149I

a) y = ...



b) y = ...



RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

Dos rectas son ***paralelas*** cuando tienen pendientes iguales

Ejemplo: las rectas

y = 2x – 3

y = 2x – 1

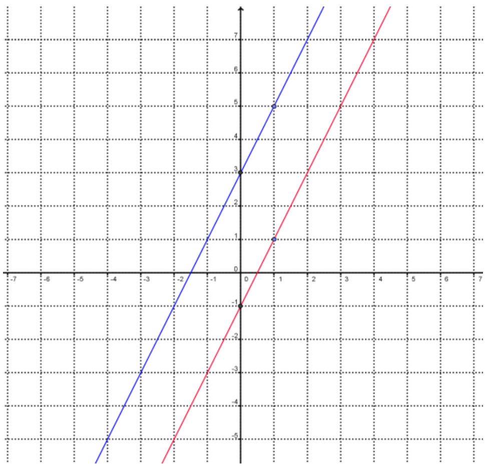
Son paralelas ya que ambas tienen pendiente 2

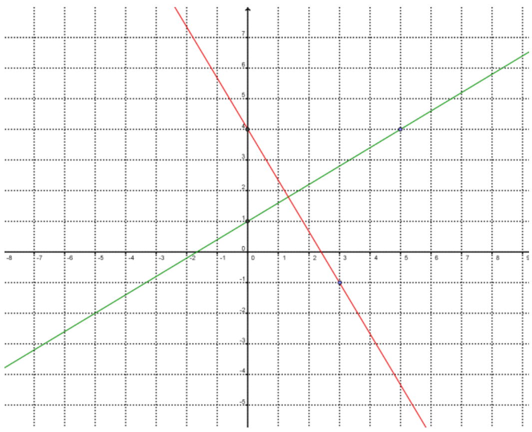
Dos rectas son ***perpendiculares*** cuando tienen pendientes inversas y de signo contrario

Ejemplo: Las rectas

$y = \frac{3}{5}x + 1 \quad , y = -\frac{5}{3}x + 4$

Son perpendiculares ya que sus pendientes son inversas y de signo contrario





Actividad 6: Encuentra dos rectas que sean paralelas y dos rectas perpendiculares, y luego grafica las paralelas en un sistema de ejes, y las perpendiculares en otro.

y = 5x – 4	y = $\frac{3}{2}x + 1$	y = $\frac{7}{6}x + 2$	y = $5x + 1$
y= $\frac{1}{4}x + 3$	y = $-\frac{1}{4}x + 2$	y = $-\frac{2}{3}x + 5$	y = $\frac{6}{7}x - 4$

Actividad 7:

a) Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es 2, y pasa por el punto (6 , 7)

b) Hallar la ecuación de la recta que es paralela a la recta y = 3x – 5, y que pasa por el punto (2 , 7)

c) Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta y = $\frac{3}{4}x + 5$ y que pasa por el punto (6 , -3)

Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es 4, y pasa por el punto (3 , 13)
Datos: **m = 4** y **b = ?**

Usaremos la ecuación de la recta →	**y = m.x + b**
Reemplazamos la pendiente **m = 4** →	y = **4**.x + **b**
Sustituimos 3 en x, 13 en y →	13 =**4**.3 + **b**
Resolvemos y despejamos b para hallar su valor. →	13 = 12 + **b**
	13 – 12 = **b**
	1 = b

La ecuación de la recta es **Y = 4x + 1** ✓

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Marco teórico

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones; con dos o más incógnitas (de primer grado) que conforman un problema matemático que consiste en encontrar los valores de las incógnitas para que verifiquen la igualdad.

La forma general de un sistema de ecuaciones lineales es:

Sistema de 2x2: dos ecuaciones con dos incógnitas.

a, b, c son números reales

Sistema 2 x 2

$$\mathbf{a_1}\, X + \mathbf{b_1}\, y = \mathbf{c_1}$$
$$\mathbf{a_2}\, X + \mathbf{b_2}\, y = \mathbf{c_2}$$

X , y son las variables

Resolver un sistema de ecuaciones lineales implica encontrar los valores de las incógnitas X , y; que satisfacen las ecuaciones del sistema. Para ello existen diferentes métodos de los cuales vamos a desarrollar a continuación:

- Método de sustitución.
- Método de igualación
- Método gráfico

Método de sustitución

Este método consiste en aislar una incógnita en una de las ecuaciones para sustituirla en la otra ecuación. De este modo, se obtiene una ecuación con una sola incognita. Una vez resuelta esta ecuación, se sustituye en alguna de las ecuaciones para hallar la otra incognita.

Ejemplo

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$x + y = 7 \Rightarrow$ Primera ecuación

$x - 2y = 1 \Rightarrow$ Segunda ecuación

Despejamos “X” en la primera ecuación:

$x + y = 7 \Rightarrow$ Primera ecuación

$$\boxed{x = 7 - y}$$

Ahora, sustituimos la expresión algebraica en la segunda ecuación, es decir, escribimos **7 – y** donde aparece “X”

$x - 2y = 1 \Rightarrow$ Segunda ecuación

$$\boxed{7 - y} - 2y = 1$$

Resolvemos la ecuación:

$$7 - y - 2y = 1$$

$$7 - 3y = 1$$

$$3y = 7 - 1$$

$$3y = 6$$

$$y = \frac{6}{3}$$

$$\boxed{y = 2}$$

Como ya conocemos “y”, podemos calcular “x” a partir de la ecuación que obtuvimos al despejar “x”:

$$\boxed{x = 7 - y}$$

$$x = 7 - 2$$

$$\boxed{x = 5}$$

Por tanto, la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

Método de Igualación.

Este método consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones para igualar las expresiones algebraicas obtenidas. Se obtiene, así, una ecuación con una incógnita.

Ejemplo

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Primera ecuación

Segunda ecuación

Despejamos la “x” en la primera ecuación:

$$3x - 2y = 0$$ Primera ecuación

$$3x = 2y$$

$$\boxed{x = \frac{2y}{3}}$$

Despejamos la “x” en la segunda ecuación:

$$2x + y = 7$$ Segunda ecuación

$$2x = 7 - y$$

$$\boxed{x = \frac{7 - y}{2}}$$

Igualamos las dos expresiones:

$$\frac{2y}{3} = \frac{7 - y}{2}$$

Resolvemos la ecuación obtenida:

$$\frac{2y}{3} = \frac{7-y}{2}$$

$$6 \cdot \frac{2y}{3} = 6 \cdot \frac{7-y}{2}$$

$$4y = 3(7-y)$$

$$4y = 21 - 3y$$

$$7y = 21$$

$$\boxed{y = \frac{21}{7} = 3}$$

Ya conocemos el valor de "y" que es 3. Ahora podemos calcular "x" en cualquiera de las expresiones (reemplazando):

$$\boxed{x = \frac{2y}{3}}$$

$$\boxed{x = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2}$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

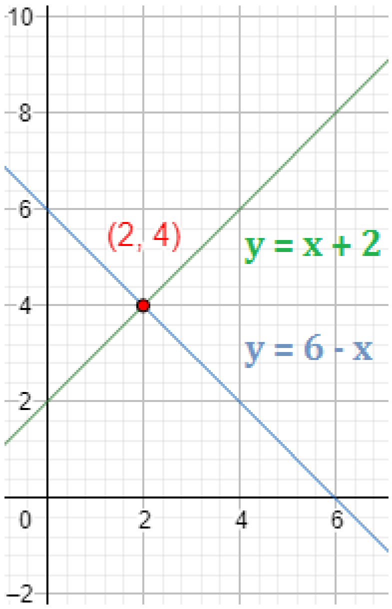
Método Grafico.

Este método consiste en representar las dos ecuaciones y calcular el punto de corte de las mismas. Este punto es la solución del sistema porque sus coordenadas cumplen ambas ecuaciones.

Ejemplo

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 6 - x \end{cases}$$

Representación de las gráficas de las dos ecuaciones:



El punto de corte entre las rectas (intersección) es (2,4).

De **(2 , 4)** la primera coordenada es la "x", la segunda es la "y", entonces la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

¡Si no hay punto de corte, el sistema no tiene solución!

Problemas resueltos de sistemas de ecuaciones

Resolvemos problemas mediante un sistema de ecuaciones lineales de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Lo importante, en primer lugar, es plantear el sistema de ecuaciones luego, resolvemos detalladamente cada uno de los sistemas que quedan determinados.

Pasos a seguir para plantear y resolver problemas utilizando sistemas de ecuaciones.

1. Obtener los datos

2. Identificar las incógnitas x e y

3. Plantear el sistema de dos ecuaciones

4. Resolver el sistema.

Problema 1: Hallar dos números sabiendo que su suma es 15 y su resta es 3.

Incógnitas:

- "X" es uno de los números
- "Y" es el otro número

Ecuaciones:

- La suma de los números es 15: $x + y = 15$
- La resta de los números es 3: $x - y = 3$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, nos quedaría x = 9 ; y = 6

Problema 2: En un estacionamiento hay 55 vehículos entre autos y motos. Si el total de ruedas es de 170. ¿Cuántos autos y cuántas motos hay?

Incógnitas:

- x = número de autos
- y = número de motos

Ecuaciones:

1ra ecuación

Como hay 55 vehículos en total

x + y = 55

2da ecuación

Hay 170 ruedas entre todos los vehículos. Un auto tiene 4 ruedas. Una moto tiene 2 ruedas

4x +2y = 170

(ATENCIÓN: No se debe mezclar el número de ruedas con el número de vehículos.)

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 55 \\ 4x + 2y = 170 \end{cases}$$

Resolvemos con el método de igualación

$\boxed{x + y = 55}$ $\qquad$ $\boxed{4x + 2y = 170}$

$x = 55 - y$ $\qquad$ $x = \frac{170-2y}{4}$

igualamos

$55 - y = \frac{170-2y}{4}$

$4.(55 - y) = 170 - 2y$

$220 - 4y = 170 - 2y$

$220 - 170 = -2y + 4y$

$50 = 2y$

$\frac{50}{2} = y$

$\boxed{25 = y}$

$x = 55 - y$

$x = 55 - 25$

$\boxed{x = 30}$

Entonces nos queda 30 autos y 25 motos (30 , 25)

Actividades

$$\begin{cases} 5x - y = 3 \\ -2x + 4y = -12 \end{cases}$$

1) El par (0 , -3) es solución del sistema

a) Verdadero b) Falso

2) Resolver por el método de sustitución los siguientes sistemas de ecuación. verificar

a) $\begin{cases} 3x+5y=15 \\ 2x-3y=-9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -2x+3y=14 \\ 3x-y=-14 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5x+2y=11 \\ 2x-3y=12 \end{cases}$

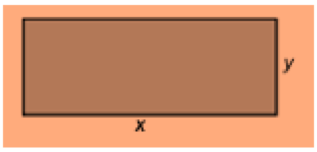
3) Aplicar el método de igualación para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. verificar

a) $\begin{cases} x+2y=1 \\ -3x+y=-10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+4y=1 \\ 2x+y=-5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x-2y=-4 \\ 2x+y=2 \end{cases}$

4) Averigua por el método grafico la solución para los siguientes sistema de ecuaciones

a) $\begin{cases} -x+y=5 \\ -2x+2y=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$

5) En un corral hay gallinas y conejos. En total hay 14 cabezas y 38 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay en el corral?
6) El perímetro de un rectángulo es de 22 cm, y sabemos que su base es 5cm mas larga que su altura. Plantea un sistema de ecuaciones y resuélvelo para hallar las dimensiones del rectángulo

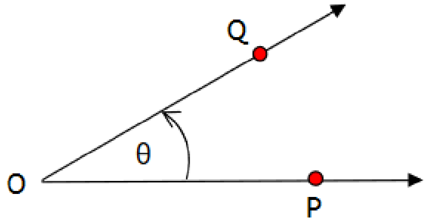


UNIDAD N°4: Trigonometría

MARCO TEÓRICO

SISTEMA DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Un **ángulo** es la porción de plano determinada por la rotación de una semirrecta desde una posición inicial hasta una posición final. El origen de la semirrecta es llamado vértice del ángulo.



Denotaremos con $P\hat{O}Q$ al ángulo, con cualquier letra griega, por ejemplo $\hat{\theta}$, o ángulo $\hat{O}$ directamente (la letra que denota al vértice).

Para medir la amplitud de un ángulo se utiliza distintos **sistemas de mediciones**, ellos son: **sistema sexagesimal**, **sistema circular** y **sistema centesimal**.

SISTEMA SEXAGESIMAL: La unidad de medida en este sistema es el grado. Un **grado sexagesimal** es cada uno de los ángulos que se obtienen al dividir la circunferencia en 360 partes iguales. Se representa por " º ". Una circunferencia tiene por tanto 360º, media circunferencia tiene 180º y un cuarto de circunferencia tiene 90º.

Un grado sexagesimal se divide en 60 minutos (1º = 60'). Un minuto se divide en 60 segundos (1' = 60''). Un ángulo que mide g grados, m minutos y s segundos se representa por: **gº m' s''**. Por ejemplo: 24º 47' 18''.

SISTEMA CIRCULAR: Para medir la amplitud de un ángulo se utiliza un arco de circunferencia. El ángulo que tiene la longitud de este arco igual al radio de la circunferencia se llama **radián**.

La longitud de la circunferencia es: L = 2.π. r, como la longitud de arco de un radián es igual a r, entonces una circunferencia tiene: $\frac{2.\pi.r}{r}$ = 2.π radianes

SISTEMA CENTESIMAL: El sistema centesimal divide una circunferencia en 400 partes iguales, o bien, un ángulo recto en 100 partes iguales, y a cada una de esas partes se le denomina grado centesimal o gradián, y se simboliza con una «g» minúscula como superíndice del número, por ejemplo, 35^g.

A su vez, cada grado centesimal se subdivide en unidades más pequeñas dividiéndolo en cien partes iguales, y dando lugar al minuto. Así, el minuto (m) en este sistema es la centésima parte del grado (1g = 100m) y el segundo (s) la centésima parte del minuto (1m = 100s).

De la misma manera, el segundo se divide en décimas, centésimas, milésimas. Un ejemplo de un ángulo expresado según el sistema centesimal sería: 40g 30m 10s.

EQUIVALENCIA ENTRE LOS SISTEMAS

Sistema Sexagesimal	Sistema Centesimal	Sistema Circular
90º	100^G	$\frac{\pi}{2}$
180º	200^G	π
360º	400^G	2π

Entre los sistemas existe una relación de proporcionalidad directa. Para expresar la medida de un ángulo en los distintos sistemas se parte de la organización de los datos, el planteamiento de la proporción y el cálculo del término desconocido.

Ejemplos:

1. Expresar un ángulo de 45° en el sistema circular.

Radianes	π	x
Grados	$180°$	$45°$

Se plantea la proporción:

$$\frac{\pi}{180°} = \frac{x}{45°}$$

Se calcula el valor de x:

$$x = \frac{45°\pi}{180°} = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Al ángulo de $45°$ le corresponde $\frac{\pi}{4}$ rad.

2. Expresar en grados sexagesimales la amplitud de un ángulo de $\frac{5\pi}{3}$ rad.

Medida en grados	$180°$	x
Medida en radianes	π	$\frac{5\pi}{3}$

$$\frac{\pi}{180°} = \frac{\frac{5\pi}{3}}{x}$$

$$x = \frac{\frac{5\pi}{3}(180°)}{\pi}$$

$$x = 300°$$

3. Calcular en grados la amplitud de un ángulo de 1 rad.

Medida en grados	180°	x
Medida en radianes	π	1

Se plantea la proporción:

$$\frac{180°}{\pi} = \frac{x}{1}$$

Se calcula el valor de x:

$$x = \frac{180°}{\pi}$$

$$x = 57{,}29578°$$

El ángulo se ha expresado en grados, pero el resultado no es un número exacto de *grados* $57{,}29578 = 57 + 0{,}29578$.

Como los submúltiplos del grado son los minutos, expresamos $0{,}29578$ en *minutos*.

Grados	1°	0,29578°
Minutos	60'	x

Se calcula el valor de x:

$$x = \frac{60\,(0{,}29578°)}{1°}$$

$$x = 60\,(0{,}29578) = 17{,}7468$$

Vemos que en $0{,}29578$ hay $17{,}7468$ *minutos*.

Como $17{,}7468' = 17' + 0{,}7468'$ se expresan los $0{,}7468$ minutos en segundos.

Minutos	1'	0,7468'
Segundos	60"	x

Se calcula el valor de x:

$$x = 60\,(0{,}7468) = 44{,}808"$$

Por lo tanto la medida en grados de un radián es $57° + 17' + 44{,}808"$ que se escribe simplemente:

$$57°\ 17'\ 44{,}8"$$

Aproximamos los segundos a $45"$ por lo tanto:

$$1\ rad = 57°\ 17'\ 45"$$

4. Expresar en el sistema centesimal un ángulo de 450°.

Medida en gradianes	200^G	x
Medida en grados	180°	450°

$$\frac{200^G}{180^0} = \frac{x}{450^0}$$

$$x = \frac{200^G . 450^0}{180^0}$$

$$x = 500°$$

TRABAJO PRÁCTICO

1) Escribir el equivalente en grados del ángulo medido en radianes:
   a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{11\pi}{12}$ c) $\frac{5\pi}{4}$ d) $\frac{7\pi}{4}$

2) Escribir el equivalente en radianes de cada ángulo indicado:
   a) 75° b) 210° c) 285° d) 50^G e) 270^G f) 120^G

3) Completar la siguiente tabla realizando todos los procedimientos en la hoja.

Sistema Sexagesimal	Sistema Circular	Sistema Centesimal
125°		
	$\frac{5\pi}{12}$	
		160^G
	$\frac{3\pi}{2}$	
350°		
		1.500^G

MARCO TEÓRICO

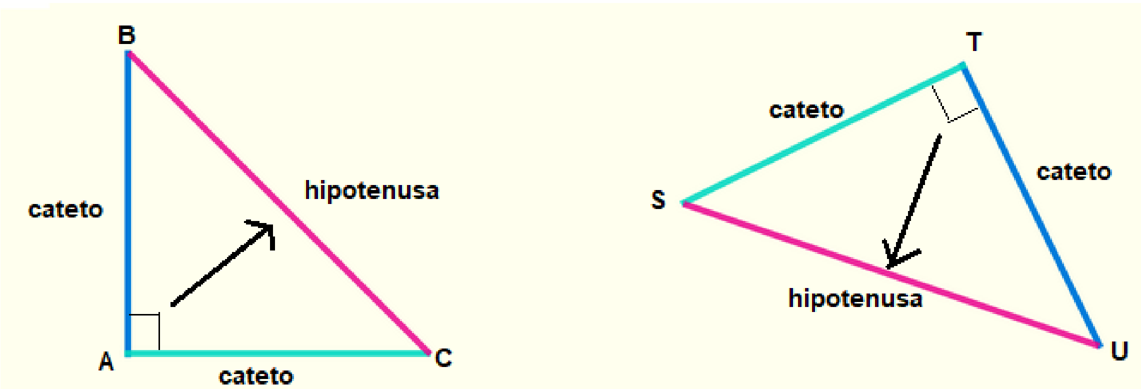
TEOREMA DE PITÁGORAS

El **Teorema de Pitágoras** es un teorema que nos permite **relacionar los tres lados de un triángulo rectángulo**, por lo que es de enorme utilidad cuando conocemos dos de los lados y queremos saber el valor del tercero.

También nos sirve para **comprobar**, conocidos los tres lados de un triángulo, **si un triángulo es rectángulo**, ya que si lo es sus lados deben cumplirlo.

Como ya estudiamos en clases anteriores, un triángulo rectángulo es aquél en el que uno de sus tres ángulos mide 90 grados, es decir, un ángulo recto. Está claro que, si uno de los ángulos es recto, ninguno de los otros dos puede serlo, pues deben sumar entre los tres ángulos180 grados.

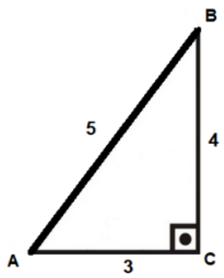
En los triángulos rectángulos, al lado mayor de los tres y opuesto al ángulo de 90° se le llama **hipotenusa**, y a los otros dos lados, **catetos**.



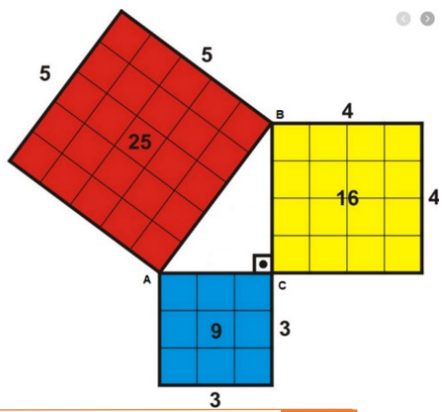
En la figura el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ es rectángulo en $\hat{A}$ (vemos que en el vértice A está marcado el ángulo con un cuadradito eso indica que ese ángulo mide 90°). Podemos identificar en él sus tres lados, que por ser rectángulo tienen nombres especiales, el lado opuesto al ángulo de 90°, en este caso el lado $\overline{BC}$ se denomina **hipotenusa**, y los lados que forman el ángulo de 90° ($\overline{AB}$ y $\overline{AC}$) **catetos.**

En el triángulo STU es rectángulo en $\hat{T}$, la hipotenusa es el lado $\overline{SU}$ y los catetos $\overline{ST}$ y $\overline{TU}$.

<u>**Teorema de Pitágoras**</u> dice que: "**En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos**".



En el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, identificamos: $\overline{AB}$ es la hipotenusa y $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ los catetos.



Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$

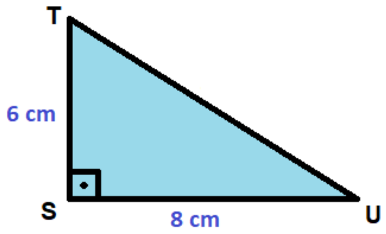
sustituimos las medidas de los lados $5^2 = 4^2 + 3^2$

aplicamos la definición de potencia $5.5 = 4.4 + 3.3$

operamos $25 = 16 + 9$

$25 = 25$

Ejemplo 1: Encontrar el valor del lado $\overline{TU}$ del siguiente triángulo rectángulo.



Identificamos la hipotenusa y los catetos del triángulo:

Hipotenusa: $\overline{TU}$ **Catetos**: $\overline{ST}$ y $\overline{SU}$

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$\overline{TU}^2 = \overline{ST}^2 + \overline{SU}^2$

$\overline{TU}^2 = 6^2 + 8^2$ reemplazamos por los valores de los catetos

$\overline{TU}^2 = 6.6 + 8.8$ aplicamos la definición de potencia

$\overline{TU}^2 = 36 + 64$ operamos

$\overline{TU}^2 = 100$ sumamos

$\overline{TU} = \sqrt{100}$ la potencia pasa al otro miembro como raíz

$\overline{TU} = 10$ calculamos la raíz cuadrada de 100

Ejemplo 2: Encontrar el valor del lado $\overline{PQ}$ del siguiente triángulo rectángulo.

Identificamos la hipotenusa y los catetos del triángulo:

Hipotenusa: $\overline{OQ}$ **Catetos**: $\overline{OP}$ y $\overline{PQ}$

Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$\overline{OQ}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2$

$13^2 = 5^2 + \overline{PQ}^2$ reemplazamos los valores de los lados

$13.13 = 5.5 + \overline{PQ}^2$ aplicamos la definición de potencia

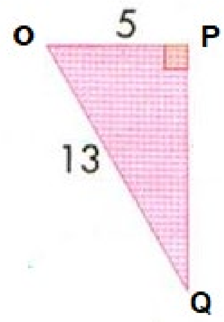
$169 = 25 + \overline{PQ}^2$ operamos

$169 - 25 = \overline{PQ}^2$ pasamos el 25 restando al otro miembro

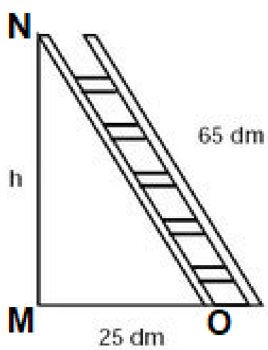
$144 = \overline{PQ}^2$ operamos

$\sqrt{144} = \overline{PQ}$ la potencia pasa al otro miembro como raíz

$12 = \overline{PQ}$ calculamos la raíz cuadrada de 144



Ejemplo 3: Una escalera de 65dm de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 25dm de la pared ¿A qué altura se apoya la parte superior de la escalera en la pared?



Hacemos un dibujo sobre la situación planteada. La pared con el piso forma un ángulo de 90° (podemos observar un triángulo rectángulo, le agregamos letras a los vértices).

Identificamos la hipotenusa y los catetos:

Hipotenusa: $\overline{NO}$ **Catetos**: $\overline{MO}$ y $\overline{MN}$; aplicamos el Teorema

$\overline{NO}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{MN}^2$

$65^2 = 25^2 + \overline{MN}^2$

$65.65 = 25.25 + \overline{MN}^2$

$4.225 = 625 + \overline{MN}^2$

$4.225 - 625 = \overline{MN}^2$

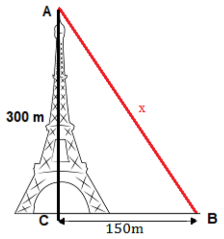
$3600 = \overline{MN}^2$

$\sqrt{3600} = \overline{MN}$

$60 = \overline{MN}$

Respuesta: La escalera se apoya a 60 dm de altura.

Ejemplo 4: Se quiere colocar un cable que parte desde la cima de la torre Eiffel (300m de altura) y que termina en el suelo a 150 metros del centro de la base de la torre. Calcular la longitud que debe tener el cable.



Aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$

$\overline{AB}^2 = 300^2 + 150^2$

$\overline{AB}^2 = 300.300 + 150.150$

$\overline{AB}^2 = 90.000 + 22.500$

$\overline{AB}^2 = 112.500$

$\overline{AB} = \sqrt{112.500}$

$\overline{AB} = 335{,}41$ (no es un número entero, escribimos dos números detrás de la coma)

Respuesta: La longitud que debe tener el cable es de 335,41 metros.

TRABAJO PRÁCTICO

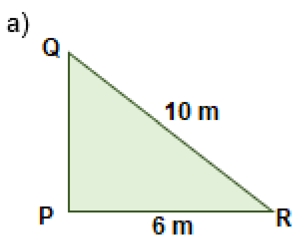
Actividad N°1:

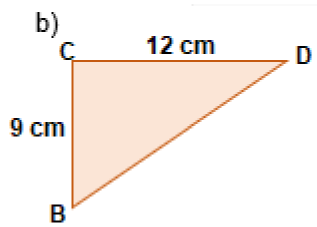
Las siguientes son las medidas de los tres lados de un triángulo. Determina si corresponden o no a un triángulo rectángulo aplicando el Teorema de Pitágoras (resolver como el ejemplo, no es necesario construir el triángulo).

12 cm 16 cm 20 cm	Recordar que la hipotenusa es el lado de mayor longitud, en este caso 20 cm, los otros lados son los catetos. $20^2 = 12^2 + 16^2$ 20.20 = 12.12 + 16.16 400 = 144 + 256 **400 = 400** Verdadero. Como los valores son iguales, podemos afirmar que los lados corresponden a un triángulo rectángulo.
a) 5 m 10 m 6 m	
a) 13 dm 10 dm 12 dm	
b) 11 km 61 km 60 km	

Actividad N°2:

Hallar la medida de los lados desconocidos de los siguientes triángulos:





c) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 14 cm y uno de los catetos mide 7 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

Actividad N°3:
Plantear y resolver:

a) Calcular la altura que podemos alcanzar con una escalera de 3 metros apoyada sobre la pared si la parte inferior la situamos a 70 centímetros de ésta.

b) Al atardecer, un árbol proyecta una sombra de 2,5 metros de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros, ¿cuál es la altura del árbol?

c) La torre Eiffel proyecta a las tres de la tarde una sombra de 55 m de largo. Si se mide la distancia entre la punta más alta de la torre y el punto donde termina su sombra tenemos 305 m. Calcular la altura de la torre.

d) Desde un balcón de un castillo en la playa se ve un barco a 85 m, cuando realmente se encuentra a 84m del castillo. ¿A qué altura se encuentra ese balcón?

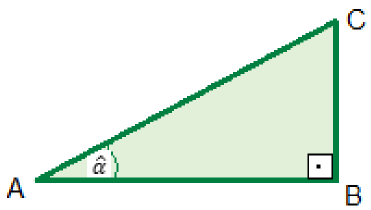
MARCO TEÓRICO

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Las razones trigonométricas relacionan la amplitud de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo con la longitud de sus lados.

Seis son las razones trigonométricas que se pueden establecer para cualquiera de los dos ángulos agudos en un triángulo rectángulo; de ellas, tres son **fundamentales** y tres son **recíprocas,** como lo vemos en el siguiente cuadro:

Razones trigonométricas			
Fundamentales		**Recíprocas**	
sen	seno	**cosec (csc)**	cosecante
cos	coseno	**sec**	secante
tan (tg)	tangente	**cotan (cotg)**	cotangente



En el triángulo rectángulo **ABC**, los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ son los catetos y $\overline{AC}$ la hipotenusa.

Las **razones trigonométricas** con respecto al ángulo $\hat{\alpha}$ en el triángulo anterior, se definen como:

Seno: es la razón (división) entre el cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa

$$\text{sen } \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Coseno: es la razón (división) entre el cateto adyacente al ángulo y la hipotenusa

$$\cos \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto adyacente a } \hat{\alpha}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

Tangente: es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el cateto adyacente al mismo.

$$\text{tg } \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto opuesto a } \hat{\alpha}}{\text{cateto adyacente a } \hat{\alpha}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

Estas tres **(seno, coseno, tangente)** son las razones fundamentales que se pueden establecer entre un ángulo agudo y los lados del triángulo rectángulo del cual forman parte.

A cada **razón fundamental** corresponde una **razón recíproca**, llamadas así, porque cada una es la inversa de otra fundamental.

Las tres siguientes son las **razones recíprocas** que se pueden establecer respecto al mismo ángulo:

Cosecante: es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo, y como es la **recíproca del seno de α** se puede expresar como

$$\text{cosec } \hat{\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

Secante: es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente al ángulo, y como es la **reciproca del coseno de α** se puede expresar como

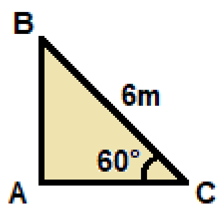
$$\sec \hat{\alpha} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

Cotangente: es la razón entre el cateto adyacente al ángulo y el cateto puesto al mismo, y como es la **recíproca de la tangente de α** se puede expresar como

$$\text{cotg } \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

- CÁLCULO DE LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO CONOCIDOS UN ÁNGULO Y UN LADO



Para calcular la medida del lado $\overline{AC}$ del triángulo rectángulo anterior, no se puede utilizar el Teorema de Pitágoras porque sólo tenemos el dato de un lado. Por tanto, queda utilizar las razones trigonométricas.

Conocemos la hipotenusa y nos están pidiendo el lado adyacente ($\overline{AC}$). La razón que relaciona estos dos lados es la del coseno:

$$\cos \hat{C} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Sustituimos los valores que conocemos y resolvemos:

- Ángulo $\widehat{C}$ = 60º
- Cateto Adyacente $\overline{AC}$
- Hipotenusa $\overline{BC}$ = 6 m

$$\cos 60° = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$\overline{AC} = \cos 60° \,.\, \overline{BC}$$

$$\overline{AC} = 0{,}5 \,.\, 6 \text{ m}$$

$$\overline{AC} = 3 \text{ m}$$

Ahora que ya conocemos la medida del lado $\overline{AC}$, podríamos utilizar el Teorema de Pitágoras para calcular el lado que nos queda $\overline{AB}$ o utilizar otra razón trigonométrica, por ejemplo, el seno:

$$\text{sen } \widehat{C} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Sustituimos los valores que conocemos y resolvemos:

- Ángulo $\widehat{C}$ = 60º
- Cateto Opuesto $\overline{AB}$
- Hipotenusa $\overline{BC}$ = 6 m

$$\text{sen } 60° = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$\overline{AB} = \text{sen } 60° \,.\, \overline{BC}$$

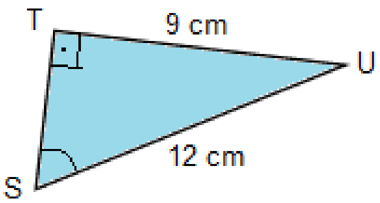
$$\overline{AC} = \text{sen } 60° \,.\, 6 \text{ m}$$

$$\overline{AC} = 5{,}12 \text{ m}$$

Conforme vamos conociendo más elementos, tenemos la posibilidad de aplicar más relaciones para encontrar la solución que nos pidan.

- CÁLCULO DE UN ÁNGULO AGUDO CONOCIDOS DOS LADOS.

Para calcular la amplitud de un ángulo de un triángulo rectángulo cuando se conoce la longitud de dos de sus lados, se deben utilizar las razones trigonométricas y la calculadora científica.



$$\text{sen}\ \widehat{S} = \frac{\overline{TU}}{\overline{SU}}$$

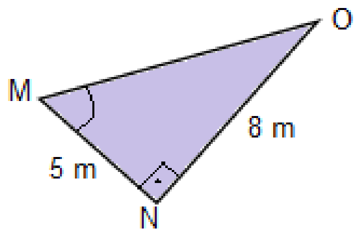
$$\text{sen}\ \widehat{S} = \frac{9\ \text{cm}}{12\ \text{cm}}$$

$$\widehat{S} = \text{arc sen } 0{,}75$$

$$\widehat{S} = 48°\ 35'\ 25''$$

Secuencia de teclas en la calculadora

SHIFT → sin → 0,75 → = → ° ' ''



$$\text{tg}\ \widehat{M} = \frac{\overline{NO}}{\overline{MN}}$$

$$\text{tg}\ \widehat{M} = \frac{8\ \text{cm}}{5\ \text{cm}}$$

$$\widehat{M} = \text{arc tg } 1{,}6$$

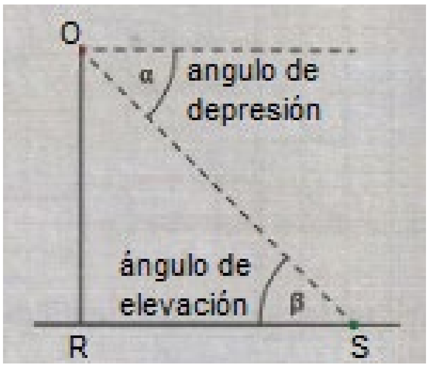
$$\widehat{M} = 57°\ 59'\ 41''$$

Secuencia de teclas en la calculadora

SHIFT → tan → 1,6 → = → ° ' ''

APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA

La **resolución de triángulos rectángulos** tiene muchas **aplicaciones**, como calcular la distancia de un cable, calcular la altura de una torre, calcular la distancia de un árbol según su sombra, calcular el ángulo que forma una escalera apoyada en una pared o cualquier otra cosa que nos pueda pedir el enunciado de un problema.



Las razones trigonométricas permiten resolver múltiples problemas en los que hay que calcular distancias entre objetos que se encuentran a diferentes alturas. Para ello es necesario conocer el ángulo de **elevación** o **depresión** que existe entre ambos.

La distancia entre el punto **O** y el **S** es la longitud de $\overline{OS}$, y la altura a la que se encuentra **O** es la longitud $\overline{OR}$. El ángulo $\hat{\alpha}$ se denomina de **depresión**; el ángulo $\hat{\beta}$, de **elevación**; y ambos son iguales por ser alternos internos entre paralelas.

TRABAJO PRÁCTICO

Actividad N°1: Escribir las razones trigonométricas del siguiente triángulo.

a) sen $\hat{\varphi} = \frac{\square}{\square}$

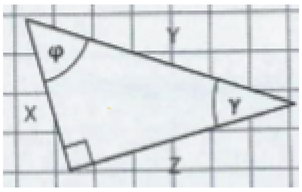
c) cos $\hat{\gamma} = \frac{\square}{\square}$

e) cos $\hat{\varphi} = \frac{\square}{\square}$

b) sen $\hat{\gamma} = \frac{\square}{\square}$

d) tg $\hat{\varphi} = \frac{\square}{\square}$

f) tg $\hat{\gamma} = \frac{\square}{\square}$



Actividad N°2: Completar con la razón trigonométrica que corresponde a cada caso.

a) $\square = \frac{A}{E}$

b) $\square = \frac{B}{E}$

c) $\square = \frac{B}{C}$

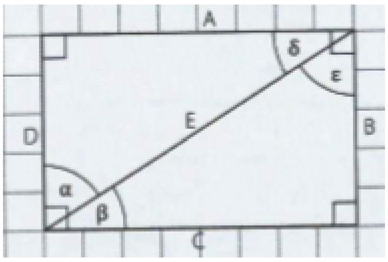
d) $\square = \frac{C}{E}$

e) $\square = \frac{D}{A}$

f) $\square = \frac{C}{B}$

g) $\square = \frac{A}{D}$

h) $\square = \frac{D}{E}$



Actividad N°3: Calcular el valor de las siguientes razones trigonométricas.

a) sen $\hat{\alpha} = \frac{\square}{\square} = \square$

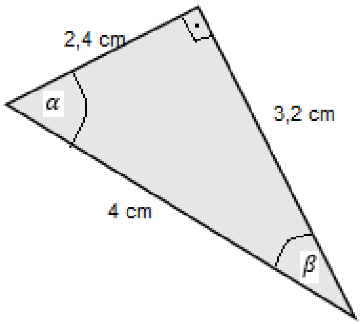
b) cos $\hat{\alpha} = \frac{\square}{\square} = \square$

c) sen $\hat{\beta} = \frac{\square}{\square} = \square$

d) cos $\hat{\beta} = \frac{\square}{\square} = \square$

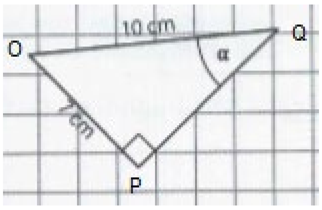
e) tg $\hat{\alpha} = \frac{\square}{\square} = \square$

f) tg $\hat{\beta} = \frac{\square}{\square} = \square$

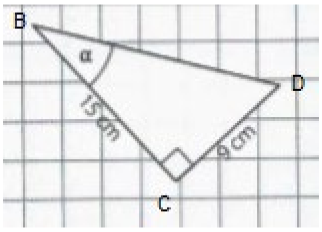


Actividad N°4: Calcular el ángulo $\hat{\alpha}$ de cada triángulo.

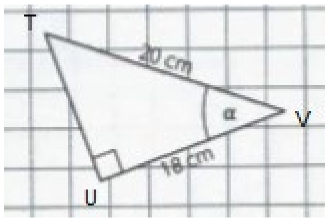
a)



b)

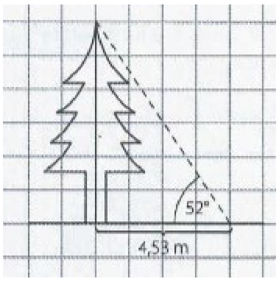


c)

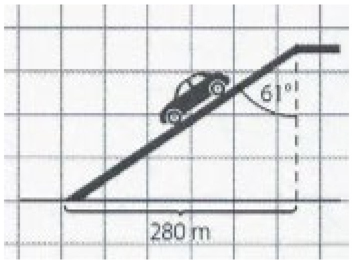


Actividad N°5: Observar la figura y calcular.

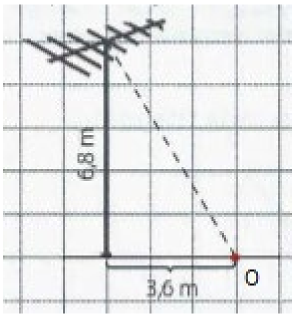
a) La altura del árbol.



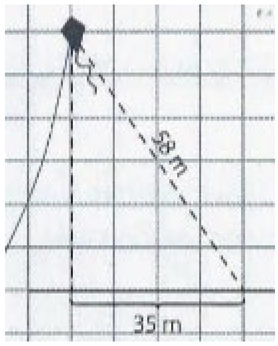
b) La longitud de la rampa.



c) El ángulo de depresión de la punta de la antena al punto O.



d) El ángulo de elevación del barrilete.



Actividad N°6: Plantear y resolver.

a) Se sube un paquete por una rampa que tiene una inclinación de 23° y una longitud de 5,80m. ¿A qué altura se sube el paquete?

b) La cima de una montaña se observa a 800 m de su pie con un ángulo de elevación de 64°. ¿A qué distancia de la cima se encuentra el observador?

c) Un bote cruza un río de 380m de ancho, pero la corriente desvía su trayectoria unos 15°. ¿Cuántos metros recorre para cruzar el río?

d) El tensor de una antena está amarrado a 50m de su pie y tiene un ángulo de elevación de 73°. ¿A qué altura de la antena está agarrado el tensor?

e) ¿Cuál es el ángulo de elevación de un avión que recorre 5.200 m en el aire y alcanza una altura de 3?00m?

f) Uno de los ángulos interiores de un rombo mide 76° y la diagonal que lo interseca mide 12 m ¿Cuál es el perímetro del rombo?

g) A cincuenta metros de la base de un edificio se observa la base de una chimenea con un ángulo de elevación de 56° y el punto más alto de la chimenea se observa con un ángulo de elevación de 64°. Calcular la longitud de la chimenea.

h) El servicio de bomberos posee una escalera de 40m de longitud. El ángulo máximo que se puede emplear por seguridad de los bomberos es de 73° medido sobre la horizontal. Calcular la altura máxima que se puede extender la escalera.

i) Desde un punto situado a 30 m arriba de un faro se observa una pequeña embarcación con un ángulo de depresión de 33°. Calcular la distancia, al pie del faro, a que se encuentra la embarcación.

j) Una estatua de 8,9 m de altura se sitúa sobre un pedestal. Si desde un sitio de 48 m del pie del pedestal se observa el extremo superior de la estatua con un ángulo de elevación de 26° ¿Cuál es la altura del pedestal?