Colegio Nº 5.051
"Ntra. Sra. de La Merced"

MATEMATICA III

Curso: 3º 3º
Turno: Tarde

Profesor : Corimayo
Olarte, Ismael

Contenido

UNIDAD Nº 1: Números Racionales

ECUACIONES LINEALES CON Q

Una forma de resolver una ecuación es despejar (si bien no es la manera más formal de resolverlas, es la más sencilla y por eso es la que vamos a utilizar). Despejar significa "dejar a la X sola" de un lado del igual y pasar todo lo demás para el otro lado.

Lo que está sumando pasa restando	$x+\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$	$x=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}$
Lo que está restando pasa sumando	$x-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$	$x=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$
Lo que está multiplicando pasa dividiendo	$x\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$	$x=\frac{1}{4}:\frac{2}{3}$
Lo que está dividiendo pasa multiplicando	$x:\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$	$x=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}$
La raíz cuadrada pasa como cuadrado	$\sqrt{x+1}=\frac{1}{3}$	$x+1=\left(\frac{1}{3}\right)^2$
Los cuadrados pasan como raíces cuadrada	$\left(x-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{1}{4}$	$x-\frac{2}{5}=\sqrt{\frac{1}{4}}$

Resolvamos la siguiente ecuación $\frac{11}{6}x-\frac{1}{5}=2$

Ejemplo Nº1	Ejemplo Nº 2
$\frac{11}{6}x-\frac{1}{5}=2$	$\frac{2x-1}{5}-\frac{x-3}{2}=\frac{1}{4}$
$\frac{11}{6}x=2+$	$\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=\frac{1}{4}$
$\frac{11}{6}x=2+\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{3}{2}$
$\frac{11}{6}x=\frac{11}{5}$	$-\frac{1}{10}x=-\frac{21}{20}$
$x=\frac{11}{5}\cdot\frac{11}{6}$	$x=-\frac{21}{20}:\left(-\frac{1}{10}\right)$
$x=\frac{6}{5}$	$x=\frac{21}{2}$

Actividad

Resolver las siguientes ecuaciones

a) $\frac{2}{5}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x = \frac{3}{5} + \frac{3}{10}x - \frac{3}{2}$

b) $\frac{2}{3}(x+1) - \frac{3}{5}x = \frac{1}{2}(x-3)$

c) $\frac{4}{9}\left(\frac{3}{8}x - \frac{27}{16}\right) - \frac{3}{4}x + 1 = \frac{1}{3}$

d) $\frac{3x+2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{5x-1}{15} + \frac{1}{6}x$

e) $\frac{4x-9}{12} - \frac{6x-10}{8} = \frac{5}{6}$

f) $\frac{3}{10} - \frac{24}{25}\left(\frac{5}{12} - \frac{5}{8}x\right) = \frac{2x-1}{6}$

ECUACIONES CUADRATICAS

Vamos a ver ahora la manera de resolver ecuaciones en las que tenemos las X elevada al cuadrado y al mismo tiempo la X elevada a la 1, si observamos detenidamente una ecuación de este tipo nos damos cuenta de que no hay manera de despejar la X como lo veníamos haciendo hasta ahora (eso de pasar sumando, restando, multiplicando, etc.) veamos entonces como se resuelve estas ecuaciones.

Toda ecuación de segunda grado se puede escribir o reducir a una ecuación equivalente cuya forma sea:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Si ninguno de los coeficientes, $a\,, b\ \ y\, c\ \ es\, cero$, es decir, $a\,, b\ \ y\, c\ \ \neq 0$ .Diremos que la ecuación es completa. Si no (si alguno es 0), diremos que es incompleta.

¿Cómo resolver ecuaciones cuadráticas?

Hay tres formas de resolver las ecuaciones cuadráticas y encontrar el valor de las variables:

- Factorización simple
- Completando el cuadrado
- Formula cuadrática

Ecuaciones Cuadráticas – Forma Factorizada

¿Cómo resolver ecuaciones de segundo grado de la forma factorizada?

Hasta ahora has resuelto ecuaciones lineales, que incluyen términos constantes (números) y términos con la variable elevada a la primera potencia $(x^1 = x)$.

Puede ser que también hayas resuelto algunas ecuaciones cuadráticas, que incluyen variables elevadas a la segunda potencia, al aplicar raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación.

A continuación trataremos de recordar una forma de resolver ecuaciones cuadráticas. Específicamente, trabajaremos con:

- Cómo resolver ecuaciones factorizadas como $(x-1)(x+3)=0$
- Cómo utilizar métodos de factorización para convertir otras ecuaciones tales como $x^2-3x-10=0$ y llevarla a la forma factorizada y resolverlas.

Resolver Ecuaciones Cuadráticas Factorizadas

Supón que se nos pide resolver la ecuación cuadrática de la forma $(x-1)(x+3)=0$

Este es un producto de dos expresiones, y es igual a cero. Observa que cualquier valor de X que haga que $(x-1)\ o\ (x+3)$ sea cero, hará que el producto en su totalidad sea cero.

$$(x-1)\ (x+3)=0$$

$$x-1=0 \qquad\qquad x+3=0$$

$$x=1 \qquad\qquad x=-3$$

El sustituir $x=1\ \ o\ bien\ x=-3$, en la ecuación tiene por resultado la ecuación verdadera $0=0$, así que ambos valores son soluciones de la ecuación.

Actividad

1) hallar la solución de estas ecuaciones cuadráticas de la forma factorizada.

   a) $(x+5)(x+7)=0$
   b) $(2x-1)(4x-3)=0$

2) Pregunta para reflexionar

¿Podemos usar el mismo método de resolución con la ecuación $(x-1)(x+3)=6$?

Ecuaciones Cuadráticas – Factorización simple (Factor Común)

Para factorizar x^2+5x solo necesitamos extraer un factor común X de ambos términos:

$$x^2+5x=x(x+5)$$

En conclusión, la expresión factorizada es $x(x+5)$

Ecuaciones Cuadráticas - Factorización simple (patrón de suma-producto)

Supón que queremos resolver la ecuación $x^2-3x-10=0$, entonces todo lo que tenemos que hacer es factorizar $x^2-3x-10=0$ y ¡resolver como lo hicimos antes!

$x^2-3x-10$ Se puede factorizar como $(x+2)(x-5)$

¿Pero cómo Factorizamos?

Como el coeficiente principal (el coeficiente de x^2 es 1) , podemos utilizar el patrón de suma-producto.

De acuerdo al patrón de suma-producto, si tenemos dos números a y b tales que $a+b=-3$ y $a\cdot b=-10$, entonces $x^2-3x-10=(x+a)(x+b)$

Al considerar las parejas de enteros cuyo producto es -10 , y eliminar aquellas cuya suma no sea -3, encontramos los números que necesitamos: $a=2$ $b=-5$

Por lo tanto, la expresión factorizada es $(x+2)(x-5)=0$

La solución completa de la ecuación es como sigue:

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x + 2)\ \ (x - 5) = 0$$

$$x + 2 = 0 \qquad\qquad x - 5 = 0$$

$$x = -2 \qquad\qquad x = 5$$

Veamos otro ejemplo para fortalecer el patrón de suma producto

Este método consiste en resolver la ecuación como un producto de binomios, es decir encontrar dos números que multiplicados den como resultado **“c”** y sumados den **“b”.**

Este método se usa cuando el coeficiente principal ***a* = 1**

Ejemplo:

$$x^2 + 1x - 6 = 0$$

1) Debemos hallar dos números que multiplicado den C y sumado den B

$$\text{Encontramos que} \begin{cases} 3 \cdot (-2) = -6 \\ \quad\quad y \\ 3 + (-2) = 1 \end{cases}$$

2) Entonces armamos nuestra ecuación cuadrática de la siguiente forma:

(x + 3)(x – 2) = 0

3) Realizamos un despeje:

$$\begin{cases} x + 3 = 0 \quad despejando;\ x = -3 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad y \\ x - 2 = 0 \quad despejando;\ x = 2 \end{cases}$$

Las dos soluciones son **x = -3** y **x = 2**

Actividad

Ahora es tu turno para resolver algunas ecuaciones. Ten en cuenta que ecuaciones diferentes pueden requerir otros métodos de factorización.

1) hallar la solución de estas ecuaciones cuadráticas

Seleccionar la opción correcta

a)

$x^2 + 5x$			
$x = 5 \; y \; x = -5$	$x = 0 \; y \; x = 5$	$x = \sqrt{5} \; y \; x = -\sqrt{5}$	$x = 0 \; y \; x = -5$

b)

$x^2 - 11x + 28$			
$x = 2 \; y \; x = 14$	$x = 4 \; y \; x = 7$	$x = -2 \; y \; x = -14$	$x = -4 \; y \; x = -7$

Ecuaciones Cuadráticas - Factorización simple (Arreglar la ecuación antes de factorizar)

Uno de los lados debe ser cero

Así es como se encuentra la solución de la ecuación $x^2 + 2x = 40 - x$

$$x^2 + 2x = 40 - x$$

$$x^2 + 2x - 40 + x = 0 \qquad esta\ 40\ y\ suma\ x$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0 \quad combina\ terminos\ semejantes$$

$$(x + 8)(x - 5) = 0 \qquad Factoriza$$

$$x + 8 = 0 \qquad\qquad x - 5 = 0$$

$$x = -8 \qquad\qquad x = 5$$

Antes de factorizar manipulamos la ecuación de manera que todos los términos estén del mismo lado y el otro lado sea cero. Solo entonces podemos factorizar y utilizar nuestro método de solución.

Ecuaciones Cuadráticas - Factorización simple (Eliminar factores comunes)

Así es como se encuentra la solución de la ecuación $2x^2 - 12x + 18 = 0$

$$2x^2 - 12x + 18 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \textit{Divide entre } 2$$

$$(x-3)^2 = 0 \quad \textit{factoriza}$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Todos los términos tenían originalmente un factor común 2, así que dividimos ambos lados entre 2 (el lado cero no se altera), lo que hizo más sencilla la factorización.

Actividad

1) Ahora resuelve algunas ecuaciones similares por ti mismo.

a) $2x^2 - 3x - 20 = x^2 + 34$

b) $3x^2 + 33x + 30 = 0$

c) $3x^2 - 9x - 20 = x^2 + 5x + 16$

Ecuaciones Cuadráticas - Completando el cuadrado

El método de completar el cuadrado es la técnica que se utiliza cuando tenemos una ecuación de segundo grado o cuadrática, del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, con "a" distinto de 0, y la transformamos, primero en un trinomio cuadrado perfecto, con el fin de "completar" la ecuación para crear un cuadrado de binomio y así poder despejar la incógnita X y llegar a las raíces o soluciones.

Para resolver $ax^2 + bx + c = 0$ completando el cuadrado:

1. Transforme la ecuación para que el término constante, "c" , esté solo en el lado derecho.
2. Si "a" , el coeficiente principal (el coeficiente del término x^2), no es igual a 1, divida ambos lados entre "a" .
3. Sume el cuadrado de la mitad del coeficiente del término x , $\left(\frac{b}{2.a}\right)^2$ en ambos lados de la ecuación.
4. Factorice el lado izquierdo como el cuadrado de un binomio.
5. Realice la raíz cuadrada en ambos lados. (Recuerde: $(x + q)^2 = r$ es equivalente a $x + q = \pm\sqrt{r}$.
6. Resuelva para x .

Ejemplo

Vamos a resolver $x^2 - 6x - 3 = 0$ completando cuadrado

$$x^2 - 6x = +3$$

$$x^2 - 6x + (-3)^2 = +3 + 9$$

$$(x - 3)^2 = 12$$

$$x - 3 = \pm\sqrt{12}$$

$$x - 3 = \pm 2\sqrt{3}$$

$$x = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

Ecuaciones Cuadráticas - Formula Cuadrática

Para las ecuaciones cuadráticas completas utilizaremos la siguiente formula:

$$\boxed{X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}}$$

Veamos un ejemplo

Hallar X de la siguiente ecuación: $3x^2 + 2x - 5 = 0$

En este caso tenemos que

$$3\,x^2 + 2\,x - 5 = 0$$

A= 3   B= 2   C=-5

Aplicando la formula queda:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot 3\cdot(-5)}}{2\cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-(-60)}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-2 \pm 8}{6}$$

Hacemos dos caminos a partir del $\pm$

Por un lado el “+” y por el otro

usamos el “-“ y así llegamos a las

dos soluciones de la ecuación

$$X_1 = \frac{-2+8}{6} = \frac{6}{6} \rightarrow X_1 = 1$$

$$X_1 = \frac{-2-8}{6} = \frac{-10}{6} \rightarrow X_1 = -\frac{5}{3}$$

Discriminante y Soluciones

Llamamos discriminante al radicando de la fórmula anteriormente mencionada.

$$\Delta = b^2 - 4\cdot a\cdot c$$

Se cumple que

- Si Δ es 0, la ecuación tiene una única solución.
- Si Δ es mayor que 0, existen dos soluciones (reales) distintas.
- Si Δ es menor que 0, no existen soluciones (reales).

Ejercicio Nº 1:

Vamos a Resolverlos por pasos

$x^2 + 2x + 1 = 0$	
1) Resolvemos el discriminante de la ecuación	$\Delta = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 1$ $\Delta = 4 - 4$ $\Delta = 0$
Por tanto, podemos observar que la ecuación tiene una solución real	

2) Aplicamos la fórmula:	$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$
Y Finalmente decimos que la solución es $x = -1$	

También podemos factorizar esta ecuación como:

$$(x+1)^2 = 0$$

Ejercicio Nº 2:

$x^2 = 2 + x$	
1)Escribimos la ecuación en la forma general:	$x^2 - x - 2 = 0$
2)Resolvemos el discriminante de la ecuación	$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)$ $\Delta = 1 + 8$ $\Delta = 9$
Por tanto, podemos observar que la ecuación tiene dos soluciones real	
3) Aplicamos la fórmula:	$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} =$ $\frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$
Y Finalmente decimos que la solución es $x = -1 \; y \; x = 2$	

También podemos factorizar esta ecuación como:

$$(x+1)(x-2) = 0$$

Ejercicio Nº 3:

$x^2 + x + 1 = 0$	
4) Resolvemos el discriminante de la ecuación	$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$ $\Delta = 1 - 4$ $\Delta = -3$
Por tanto, podemos observar que no hay solución en los reales	
Y tampoco podemos factorizarlo	

Actividad

a) $-2x^2 + 5x - 2 = 0$
b) $3x^2 + 6x - 9 = 0$
c) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

Ecuaciones Cuadráticas Incompletas

Si b = 0 , la ecuación de segundo grado es incompleta de la forma $ax^2 + c = 0$.

Para resolver este tipo de ecuaciones, se despeja el valor de la X teniendo en cuenta que $\sqrt[2]{x} = |x|$

Ejemplo

$x^2 - 9 = 0$ $x^2 = 9$ $\lvert x\rvert = \sqrt{9}$ $x_1 = 3 \ \wedge \ x_2 = -3$	$-x^2 + 49 = 0$ $-x^2 = -49$ $x^2 = 49$ $\lvert x\rvert = \sqrt{49}$ $x_1 = 7 \ \wedge \ x_2 = -7$

Si c = 0, la ecuación de segundo grado es incompleta de la forma $ax^2 + bx = 0$

Para resolver este tipo de ecuaciones, se debe tener en cuenta que dado $m \cdot n = 0 \rightarrow m = 0 \vee n = 0$

Ejemplo

$x^2 + 3x = 0$ $x \cdot (x + 3) = 0$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 0 = 0 \rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$	$-3x^2 + x = 0$ $x \cdot (-3x + 1) = 0$ $\begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x_2 + 1 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$

Actividad

Resuelvan las siguientes ecuaciones incompletas

a) $-3x^2 + 27 = 0$
b) $-x^2 + 4 = 0$
c) $x^2 + 5 = 1$
d) $3x^2 - x = 0$
e) $2x^2 = -6x$